Über den Newtonschen Grenzwert der Allgemeinen Relativitätstheorie und die relativistische Erweiterung Newtonscher Anfangsdaten

Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von Martin Lottermoser
aus Hannover

München, den 9. Mai 1988
(Korrigierter Nachdruck, September 2005)

1. Gutachter: Prof. Dr. Jürgen Ehlers

2. Gutachter: Prof. Dr. Georg Süßmann

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Juli 1988

Die Originalfassung dieser Arbeit hat die Deutsche Bibliographie-Nummer (DBN) 89.087122.1.

In diesen Nachdruck sind die als Einzelblatt verteilten Korrekturen vom 14. März 1990 eingearbeitet; der Lebenslauf wurde entfernt. Aufgrund von seit 1988 erfolgten Änderungen an TEX (Makros und Trennungsmuster) und durch die Verwendung anderer Schriften ergaben sich zudem ein paar geringfügige Unterschiede zum Original in den Zeilen- und Seitenumbrüchen. Ferner konnte ich mir nicht verkneifen, ein weiteres Zitat der Arbeit voranzustellen, das da einfach hin *muß*.

Die Aussagen des Kapitels 4 habe ich später noch um den analytischen Fall erweitert. Vor allem aber ergab sich, daß dieser Satz nicht von den gewichteten Sobolev-Räumen abhängt sondern daß er für eine ganze Klasse abstrakt definierbarer Funktionenräume gilt, unter denen die Sobolev-Räume ein Spezialfall sind. Den Beweis findet man in *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 57(3), 279–317 (1992).

Meine derzeitige Adresse ist:

Martin Lottermoser
Greifwaldstraße 28
38124 Braunschweig

E-Mail: Martin.Lottermoser@t-online.de

Zusammenfassung

In dieser Arbeit geht es um Beziehungen zwischen der Newtonschen und der Einsteinschen Gravitationstheorie. Zum einen betrachte ich den Newtonschen Grenzwert, d. h. den Übergang von Lösungen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu Lösungen der Newtonschen Theorie. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz dieses Grenzwertes hergeleitet. Zum anderen befasse ich mich mit der Frage der relativistischen Erweiterung einer gegebenen Newtonschen Lösung. Dies wird behandelt im Rahmen des raumartigen Anfangswertproblems, und es zeigt sich, daß die Erweiterung zumindest für die Lösungen der Zwangsbedingungen problemlos möglich ist.

'And besides,' said Michael, 'I am not going to embark in such a business and have no fun for my money.'

'Oh, my dear sir, is that a proper spirit?' cried Pitman.

'Oh, I only said that to cheer you up,' said the unabashed Michael. 'Nothing like a little judicious levity. . . .'

R.L. Stevenson, L. Osbourne
"The Wrong Box"

Newtonian, *adj.*

Pertaining to a philosophy of the universe, invented by Newton, who discovered that an apple will fall to the ground, but was unable to say why. His successors and disciples have advanced so far as to be able to say when.

Ambrose Bierce
"The Devil's Dictionary"

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Neben vielen logisch und physikalisch überzeugenden Eigenschaften — und zum Teil als Folge davon — hat die Allgemeine Relativitätstheorie (AR) den praktischen Nachteil, daß physikalisch nützliche Lösungen ihrer Feldgleichungen schwer zu erhalten sind. Besonders schmerzlich ist dies beim Zweikörper-Problem, denn dort liefert die ältere Newtonsche Gravitationstheorie (NG) eine geschlossene und mit großer Genauigkeit zutreffende Lösung (zumindest für Massenpunkte). Dieser Erfolg ist der AR bisher versagt geblieben, und viel Hoffnung scheint auch für die Zukunft nicht zu bestehen.

In einer solchen Situation versucht man natürlich, Näherungsverfahren anzuwenden. Bei den meisten Methoden geht man aus von einer bekannten Lösung, schreibt die Abweichung zur gesuchten Lösung als Reihe in einem gewissen Satz von Parametern, und versucht dann, die Koeffizienten rekursiv zu bestimmen. Der Wert dieses Verfahrens hängt davon ab,

(a) ob man die Koeffizienten rekursiv bestimmen kann (Lösbarkeit der linearisierten Gleichung),
(b) ob die Reihe Schlüsse auf die gesuchte Lösung zuläßt (in welchen Sinne ist sie eine Näherung?), und
(c) wieviele Terme man bestimmen muß, um eine brauchbare Antwort zu erhalten.

Läßt sich die Gültigkeit der Voraussetzungen des Taylorschen Satzes nachweisen, so erhält man als Teilantwort auf diese Fragen wenigstens die Aussage, daß man für hinreichend kleine Unterschiede zwischen gesuchter und bekannter Lösung eine brauchbare Reihe bekommt. In diesem Fall ist es für die Güte des Näherungsverfahrens von entscheidender Bedeutung, ob man in der Klasse zu untersuchender Lösungen eine ausreichend dichte Menge bekannter Lösungen finden kann.

Betrachtet man das Zweikörper-Problem unter diesem Gesichtspunkt, so bieten sich offensichtlich die Newtonschen Lösungen als Ausgangspunkte für Näherungsverfahren an. Denn setzt man einmal symbolisch „Wirklichkeit = AR“, so zeigen die Beobachtungen, daß der Unterschied zur Newtonschen Theorie — gemessen in beobachtbaren Größen — in den meisten derzeit interessanten Fällen wie z.B. beim Binärpulsar PSR 1913+16 tatsächlich klein ist. Dies ist der motivierende Ausgangspunkt für post-Newtonsche Entwicklungen in der AR.

Die verschiedenen existierenden post-Newtonschen Entwicklungsmethoden leiden allerdings unter gewissen Problemen.

(a) Sie sind in der Regel nicht wohldefiniert. Insbesondere ist meistens nicht klar, nach was für einem Parameter entwickelt wird. In den Fällen, in denen Reihen in $1/c$ ($c =$ Lichtgeschwindigkeit) betrachtet werden, erscheint es willkürlich, was für Funktionen von $1/c$ man an verschiedenen Stellen in die Gleichungen einzuführen hat. Außerdem ist es keineswegs physikalisch klar, was man sich unter „Lichtgeschwindigkeit $\to \infty$“ vorzustellen hat.

(b) Die Entwicklungen sind gar nicht „post-Newtonsch“. Bei diesen Verfahren macht man nämlich Annahmen über die relativistische Raumzeit (kleine Geschwindigkeiten, schwache Felder), die dazu führen, daß sich bei einer Entwicklung um den Minkowski-Raum in der ersten nicht-verschwindenden Ordnung die Newtonschen Gleichungen ergeben. Dies ist also nicht eine Entwicklung um eine Newtonsche Lösung, sondern ist anzusprechen als relativistische Linearisierung um den Minkowski-Raum „in Richtung der Newtonschen Theorie“. Von einer solchen Entwicklung ist zu erwarten, daß sie nur in der Nähe des Minkowski-Raumes gut ist. Auf diese Weise verschenkt man die Macht der Newtonschen Gravitationstheorie.

(c) Die Beziehung zur exakten Lösung bleibt völlig ungeklärt. Dies scheint, wie der Reihenansatz überhaupt, auf der impliziten Annahme zu beruhen, daß die Voraussetzungen des Satzes von Taylor unter allen Umständen gegeben sind.

(d) Alle Verfahren führen nach ein paar (typisch 3 oder 4) Iterationsschritten zu Ausdrücken für den nächsten Koeffizienten, die sinnlos sind, weil sie im allgemeinen Fall divergente Integrale enthalten. Dies steht im Widerspruch zu den bei der Herleitung dieser Integrale gemachten Annahmen, so daß diese Verfahren logisch inkonsistent sind.

Das gravierendste Manko ist natürlich (d). Mehrere Autoren haben daraus den Schluß gezogen, daß man in diesem Fall nicht nach den Potenzen entwicklen kann, und haben daher versucht, die Divergenzen durch Entwicklung nach erweiterten Funktionensystemen (z. B. $\{\varepsilon^n,\ \varepsilon^n \ln^m \varepsilon \mid n, m \in \mathbb{N}\}$) zu vermeiden. Dies scheint mir jedoch am Problem vorbeizuzielen, denn zu jedem vorgegebenen Funktionensystem wird es (so vermute ich) immer akzeptable Funktionen geben, die sich nicht danach entwickeln lassen. („Akzeptabel“ bedeutet, wie man im Abschnitt 3 sehen wird, in diesem Zusammenhang „in $\varepsilon = 0$ stetig“.) Verwendet man eine solche Funktion von ε z. B. in der Schwarzschild-Lösung für die Masse, so erhält man schon für die Einsteinschen Vakuumgleichungen eine nicht-entwickelbare Lösung. Die Frage „welches Funktionensystem reicht für alle Raumzeiten?“ hat somit die Antwort „keines“, und sollte ersetzt werden durch „wann reicht ein bestimmtes Funktionensystem?“. Hier bietet sich zuerst das System der einfachen Potenzen an, weil man dafür die angestrebten Aussagen sofort aus dem Satz von Taylor erhalten kann.

Wie vermeidet man nun die bekannten Fehler bisheriger Verfahren? Auf jeden Fall sollte man versuchen, als Ausgangspunkt für Entwicklungen wirklich die Newtonschen Lösungen zu nehmen. Das wirft die Frage auf, wie man denn überhaupt eine Lösung der einen Theorie (hier der AR) um eine Lösung einer anderen Theorie (der NG) entwickeln soll. Dazu braucht man eine „Über-Theorie“, die beide Theorien als Spezialfälle enthält, und in der man die Entwicklung definieren kann. Eine solche Formulierung in kovarianter Form wurde das erste Mal von J. Ehlers [1] angegeben. Sie bildet die Grundlage dieser Arbeit.

Der Nutzen einer Rahmentheorie beschränkt sich aber nicht auf das Mathematische. Sie stellt auch Interpretations-Begriffe bereit, die beiden Theorien gemeinsam sind, und die den Vergleich ihrer Aussagen erleichtern. Wenn darüber hinaus das begriffliche Gerüst der einen Theorie reichhaltiger oder leichter verständlich ist als das der anderen (was bei der

NG zutrifft), so findet man hier außerdem noch Hilfen zur Bildung vergleichbarer Begriffe der anderen Theorie und zur Interpretation ihrer Lösungen.

Hat man die Rahmentheorie, so kann man allgemein fragen, welche Beziehungen zwischen Lösungen der AR und der NG bestehen. Unter dem Gesichtspunkt, daß die AR die genauere und die NG die einfachere Theorie ist, ergeben sich vor allem zwei Fragenkomplexe:

(1) Vorgegeben ist eine Lösung der AR. Wann gibt es dazu eine Lösung der NG, die „dieselbe physikalische Situation beschreibt“ und z. B. als Interpretationsstütze dienen kann? Wie bekommt man sie? (Newtonscher Grenzwert)

(2) Vorgegeben ist eine Lösung der NG. Wann gibt es dazu eine Lösung der AR, die „dieselbe physikalische Situation beschreibt“? Wie bekommt man sie? (Relativistische Erweiterung)

Intuitiv ist es vielleicht schon hier verständlich, daß (1) einfacher zu beantworten ist als (2). Weil eine Lösung der AR durch mehr Funktionen beschrieben wird als eine der NG, muß man beim Übergang AR $\to$ NG nur Information loswerden, während man sie in umgekehrter Richtung hinzuzufügen hat. Insbesondere wird man die relativistische Lösung in (2) im allgemeinen nur näherungsweise bestimmen können. Damit stellen sich dort folgende zusätzliche Fragen:

(a) Was ist eine post-Newtonsche Näherung?

(b) Wann existiert sie?

(c) Was ist ihre Beziehung zu einer relativistischen Lösung, d. h. in welchem Sinne ist sie eine Approximation (falls überhaupt)?

Dieser Problemkreis soll im folgenden betrachtet werden.

2. Die Rahmentheorie

Dieser Abschnitt befaßt sich mit einem von J. Ehlers [1] aufgestellten Satz von Axiomen, die eine Rahmentheorie für NG und AR definieren. Die Unterscheidung der Theorien erfolgt darin durch einen reellen Parameter λ, der für die AR positiv ist und im Newtonschen Fall verschwindet.

2.1. Die Axiome

Zunächst ist festzulegen, was die mathematischen Objekte der Theorie sind, oder — vornehm formuliert — auf welcher Menge die Axiome definiert sein sollen, wenn man sie als wahrheitswertige Funktionen auffaßt.

> **Axiom 1 (Mathematisches Modell).** *Die mathematischen Objekte der Theorie sind Tupel $(M, g_{\mu\nu}, h^{\alpha\beta}, \Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau}, T^{\alpha\beta}, \lambda, G)$, die ich mathematische Modelle nenne, und für deren Bestandteile gilt:*
>
> *(a) M ist eine 4-dimensionale reelle differenzierbare Mannigfaltigkeit, die Hausdorffsch (T_2) und zusammenhängend sein soll (Raumzeit).*
>
> *(b) $g_{\mu\nu}$, $h^{\alpha\beta}$ und $T^{\alpha\beta}$ sind symmetrische Tensorfelder auf M (Zeitmetrik, Raummetrik und Materietensor).*
>
> *(c) $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau}$ ist ein torsionsfreier linearer Zusammenhang auf M (Gravitationsfeld).*
>
> *(d) λ und G sind reelle Zahlen (Kausalitäts- und Gravitationskonstante).*

Minimalbedingungen an die Differenzierbarkeit ergeben sich aus der Forderung nach Formulierbarkeit der Axiome. Danach müssen $g_{\mu\nu}$, $h^{\alpha\beta}$, $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau}$ und $T^{\alpha\beta}$ mindestens einmal differenzierbar sein, und M hat wenigstens eine C^3-Mannigfaltigkeit zu sein.

Bevor es weitergeht, führe ich noch eine Reihe von Konventionen ein. (In der Notation orientiere ich mich im allgemeinen am Kapitel 2 von Hawking und Ellis [2].) Der Tangentenraum von M im Punkt p sei T_pM, der Kotangentenraum T^*_pM. Griechische Indizes laufen über die Werte 0–3, lateinische von 1 bis 3. Wenn $x^0 = t$ eine Zeitkoordinate ist, verwende ich gelegentlich t als Index statt 0, also z.B. $g_{tt} = g_{00}$. Runde Klammern um Indizes bezeichnen die Operation der Symmetrisierung, $k_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(k_{\mu\nu} + k_{\nu\mu})$, eckige die der Antisymmetrisierung: $k_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(k_{\mu\nu} - k_{\nu\mu})$. Manchmal ist es übersichtlicher, für Tensoren die indexfreie Schreibweise zu verwenden. Beispielsweise soll gelten:

$$
\begin{aligned}
g(A, B) &= g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} \quad \text{für } A,\, B \in T_pM, \\
\langle \omega, X \rangle &= \omega_{\mu} X^{\mu} \quad \text{für } \omega \in T^*_pM,\ X \in T_pM.
\end{aligned}
$$

$g_{\mu\nu}$ und $h^{\alpha\beta}$ vermitteln die folgenden Abbildungen zwischen Tangenten- und Kotangentenraum („Herauf- und Herunterziehen von Indizes“):

$$
\begin{aligned}
\psi_h &: T^*_pM \to T_pM, \qquad \omega^{\alpha}_{\bullet} := \psi_h(\omega)^{\alpha} := h^{\alpha\beta}\omega_{\beta}, \\
\psi_g &: T_pM \to T^*_pM, \qquad X^{\bullet}_{\mu} := \psi_g(X)_{\mu} := g_{\mu\nu} X^{\nu}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Die Verallgemeinerung dieser $\bullet$-Notation auf Tensoren höherer Stufen ist offensichtlich. Wie üblich bezeichne ich die kovariante Ableitung bezüglich $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau}$ mit einem Semikolon, die partielle Ableitung nach den Koordinaten mit einem Komma. Also gilt z. B.:

$$V^{\alpha}{}_{;\mu} = V^{\alpha}{}_{,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V^{\nu}.$$

Indexfrei verwende ich die Schreibweise $\nabla_X Y$ für $Y^{\alpha}{}_{;\mu} X^{\mu}$. Schließlich sei noch klargestellt, daß $\mathbb{N} := \{1, 2, ...\}$ für die natürlichen Zahlen und $\mathbb{R}$ für die reellen Zahlen stehen soll. Davon bilde ich:

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad \mathbb{R}^+ := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}, \qquad \mathbb{R}^+_0 := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Ferner treten bei der Angabe der Differenzierbarkeitsklasse auch die Mengen $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ und $\overline{\mathbb{N}}_0 := \overline{\mathbb{N}} \cup \{0\}$ auf, wobei C^{ω} „reell-analytisch“ bedeuten soll.

Als nächstes ist zu erläutern, wie die mathematischen Modelle physikalisch zu interpretieren sind. Dazu stellt man Bezüge zu beobachtbaren Größen her.

Axiom 2 (Interpretationsregeln)

(a) *Beobachter bewegen sich auf zeitartigen Weltlinien, d. h. auf Kurven, für deren Tangentenvektor V überall $g(V, V) > 0$ gilt. Die Raum-Richtungen eines Beobachters sind die Tangentenvektoren $X \neq 0$ längs der Kurve, die bezüglich $g_{\mu\nu}$ orthogonal zu V sind: $g(V, X) = 0$.*

(b) *Zeitliche Abstände sind definierbar längs zeitartiger Kurven. Ist s der Kurvenparameter, so gilt für das infinitesimale Zeitintervall längs der Kurve:*

$$dt = \sqrt{g(V, V)}\, ds.$$

(c) *Räumliche Abstände sind definierbar längs raumartiger Kurven, d. h. für den Tangentenvektor V an die Kurve gilt:*

$$\exists\, \omega_{\mu}\colon\ V^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\bullet},\ h(\omega, \omega) > 0.$$

Ist s wieder der Kurvenparameter, so ist das Längenintervall

$$dl = \sqrt{h(\omega, \omega)}\, ds.$$

(d) *Die Massendichte, die ein Beobachter V an einem Punkt der Raumzeit sieht, ist:*

$$\varrho(V) = \frac{T^{\bullet\bullet}_{\mu\nu}\, V^{\mu} V^{\nu}}{g(V, V)}\ .$$

(Statt „Massendichte“ wäre es zutreffender zu sagen „Dichte der Quellen des Gravitationsfeldes“. Aber das ist mir zu lang.)

Die folgenden drei Axiome legen fest, welchen Bedingungen ein mathematisches Modell zu genügen hat, um als „Lösung der Rahmentheorie“ bezeichnet zu werden.

Axiom 3 (Metrische Axiome)

(a) In jedem Punkt der Raumzeit existiert mindestens ein zeitartiger Vektor:

$$\forall\, p \in M\ \exists\, V \in T_pM\colon\ g(V,V) > 0.$$

(b) In jedem Punkt der Raumzeit ist die Raummetrik positiv definit auf jedem „Beobachter-orthogonalen“ Teilraum des Kotangentenraumes:

$$\forall\, p \in M,\ V \in T_pM,\ g(V,V) > 0\colon$$
$$h^{\alpha\beta} \text{ ist positiv definit auf } H^+(V) := \{\, \omega \in T_p^*M \mid \langle \omega, V \rangle = 0 \,\}.$$

(c) Die von Raum- und Zeitmetrik induzierten Abbildungen ψ_h und ψ_g sind miteinander verknüpft durch:

$$\psi_g \circ \psi_h = -\,\lambda\ \mathrm{id}_{T_p^*M}\,,$$

oder in Komponenten:

$$g_{\mu\nu} h^{\nu\sigma} = -\,\lambda\, \delta^\sigma_\mu\,.$$

Axiom 4 (Zusammenhangs-Axiome)

(a) Der Zusammenhang $\Gamma^\alpha_{\sigma\tau}$ ist verträglich mit Raum- und Zeitmetrik:

$$g_{\mu\nu;\sigma} = 0, \quad h^{\alpha\beta}{}_{;\sigma} = 0.$$

(b) Der zu $\Gamma^\alpha_{\sigma\tau}$ gehörende Krümmungstensor $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = 2(\Gamma^\alpha_{\beta[\delta,\gamma]} + \Gamma^\alpha_{\mu[\gamma}\Gamma^\mu_{\delta]\beta})$ besitzt die Eigenschaft:

$$R^\alpha{}_\beta{}^\gamma_{\bullet}{}_\delta = R^\gamma{}_\delta{}^\alpha_{\bullet}{}_\beta\,.$$

Axiom 5 (Materie-Axiome). *Der Materietensor $T^{\alpha\beta}$ ist mit der Geometrie verknüpft über:*

(a) $$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

(b) $$R_{\mu\nu} = 8\pi G\,(T^{\bullet\bullet}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} T^{\sigma\bullet}{}_\sigma\, g_{\mu\nu}),$$

wobei $R_{\mu\nu} := R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu}$ der Ricci-Tensor von $\Gamma^\alpha_{\sigma\tau}$ ist.

2.2. Folgerungen aus den Axiomen

2.2.1. Die Meß-Dimensionen der mathematischen Objekte und der Wechsel von Einheiten

Die in den Axiomen 1 und 3–5 vorgestellten Objekte und postulierten Beziehungen sind rein mathematischer Natur. Die Interpretationsregeln (Axiom 2) definieren zwar eine Reihe von suggestiven Bezeichnungen für gewisse mathematische Größen und Sachverhalte, aber das reicht noch nicht aus, um mathematische Modelle mit beobachtbaren physikalischen Situationen in Verbindung zu bringen: ein mathematisches Modell liefert nur Zahlen, die Beobachtung dagegen ergibt Zahlen erst aus dem Befolgen gewisser Meßvorschriften und dann auch nur in Bezug auf ein spezielles System von Einheiten. Die Meßvorschriften unterstelle ich in dieser Arbeit als unproblematisch, und denke sie mir im Axiom 2 enthalten. Für die Einheiten definiere ich:

Definition 1.

— *Unter einem System von Einheiten $S = (Z, L, M)$ verstehe ich hier eine Verabredung darüber, in welchen in der Wirklichkeit vorhandenen Standards die Maßzahlen von mathematischen Größen der Dimensionen Zeit, Länge und Masse interpretiert werden sollen, um physikalische Aussagen zu bekommen.*

— *Ein Wechsel des Einheitensystems von S nach S' wird repräsentiert durch ein Tripel (α, β, γ) positiver reeller Zahlen. Ich schreibe symbolisch:*

$$S' = (Z', L', M') = (\alpha Z, \beta L, \gamma M).$$

Damit ist gemeint: die Zahlen α, β und γ geben an, welche Größe die neuen Standards Z', L' und M' gemessen in den alten haben. Die Maßzahlen für Zeiten, Längen und Massen transformieren sich dann so:

$$t' = \tfrac{1}{\alpha} t, \quad l' = \tfrac{1}{\beta} l, \quad m' = \tfrac{1}{\gamma} m.$$

— *Ein Paar $PM = (MM, S)$ bestehend aus einem mathematischen Modell MM und einem Einheitensystem S bezeichne ich als physikalisches Modell.*

Für „physikalisches Modell“ könnte ich auch „gedachte Situation in der Wirklichkeit“ sagen.

Damit die vorangegangene Definition für die Rahmentheorie anwendbar ist, muß ich noch ihren mathematischen Größen Meß-Dimensionen zuordnen. Ich verwende dabei die Interpretationsregeln als Leitfaden, und betrachte Koordinaten (Namen für Ereignisse) und Kurvenparameter als von Natur aus dimensionslos. Zwar kann man sie gelegentlich an die Geometrie der Raumzeit anpassen, wie es z. B. üblicherweise mit der Radialkoordinate in der Schwarzschild-Metrik geschieht, oder wie man es bei der Normierung von Tangentenvektoren macht, doch sei von solchen Fällen im folgenden der Einfachheit halber abgesehen. Dann lassen sich die Meß-Dimensionen der mathematischen Objekte mit den Interpretationsregeln erschließen.

Aus dem Ausdruck für das infinitesimale Zeitintervall längs einer durch s parametrisierten Kurve mit Tangentenvektor V,

$$dt = \sqrt{g(V,V)}\,ds,$$

läßt sich direkt ablesen, daß jede Komponente $g_{\mu\nu}$ der Zeitmetrik die Dimension einer Zeit zum Quadrat besitzt. Etwas verwickelter ist das bei $h^{\alpha\beta}$: das infinitesimale Längenintervall

$$dl = \sqrt{h(\omega,\omega)}\,ds$$

hat die Dimension einer Länge, also besitzt $h(\omega,\omega)$ die einer Länge zum Quadrat. ω hängt mit dem dimensionslosen Tangentenvektor V durch $V^\mu = h^{\mu\nu}\omega_\nu$ zusammen, so daß ω die inverse Dimension von $h^{\alpha\beta}$ hat. Daraus folgt, daß $h^{\alpha\beta}$ eine reziproke Länge zum Quadrat sein muß.

Aus dem dritten der metrischen Axiome (Axiom 3(c)) folgt dann, daß die Kausalitätskonstante λ von der Dimension einer reziproken Geschwindigkeit zum Quadrat ist.

Die Zusammenhangskomponenten $\Gamma^\alpha_{\sigma\tau}$ sind notwendigerweise dimensionslos, wie man aus

$$V^\alpha{}_{;\beta} = V^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}V^\mu$$

entnehmen kann. Daraus folgt, daß auch Riemann- und Ricci-Tensor keine Dimension besitzen.

Wählt man als Dimension der Massendichte Masse pro Volumen, so folgt aus Axiom 2(d) mit der Kenntnis der Dimension von $g_{\mu\nu}$, daß die Komponenten $T^{\alpha\beta}$ des Materietensors von der Dimension Masse pro ((Zeit)^2 mal (Länge)^3) sind. Schließlich kann man aus den Feldgleichungen in Axiom 5 ablesen, daß die Gravitationskonstante G die reziproke Dimension von $T^{\bullet\bullet}_{\mu\nu}$ besitzt, d.h. (Länge)^3 durch (Masse mal (Zeit)^2).

Fordert man von einer physikalischen Theorie, daß sie verschiedene Einheiten zuläßt, so muß sie Regeln enthalten, mit denen man aus einem „physikalischen Modell“ — wie oben definiert — durch einen Wechsel der Einheiten ein neues physikalisches Modell erhält, das dieselbe Situation der Wirklichkeit beschreibt, d.h. in diesem Sinne äquivalent zum vorigen Modell ist. Diese Regeln müssen angeben, wie jede dimensionsbehaftete Größe des mathematischen Modells zu transformieren ist. Das ist aber dasselbe wie festzulegen, welche Meß-Dimension jedem mathematischen Objekt zuzuordnen ist, und das ist bereits geschehen. (Puristen würden vermutlich umgekehrt „dimensionsbehaftet“ definieren als „beim Wechsel von Einheiten zu transformieren“. Je nun.) Für die Rahmentheorie findet man also:

Satz 1. *Gegeben sei ein physikalisches Modell PM* $= (MM, S)$. *Das Einheitensystem* $S = (Z, L, M)$ *wird transformiert laut:*

$$S' = (Z', L', M') = (\alpha Z, \beta L, \gamma M).$$

$\Longrightarrow$ *Es gibt genau ein mathematisches Modell MM*$'$, *das zusammen mit* S' *ein zu PM äquivalentes physikalisches Modell bildet. Die Transformationen der dimensionsbehafteten Größen sind:*

$$\begin{gathered} g'_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha^2}\, g_{\mu\nu}, \quad h'^{\sigma\tau} = \beta^2\, h^{\sigma\tau}, \quad T'^{\sigma\tau} = \frac{\alpha^2\beta^3}{\gamma}\, T^{\sigma\tau}, \\ \lambda' = \left(\tfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 \lambda, \quad G' = \frac{\alpha^2\gamma}{\beta^3}\, G. \end{gathered} \tag{2}$$

Generell gilt: die Tatsache, daß die Wahl der Einheiten freigestellt ist, führt bei jeder physikalischen Theorie notwendig zu der Forderung, daß es auf ihren mathematischen Modellen eine Schar von Ähnlichkeitstransformationen geben muß, die Lösungen in Lösungen überführen (die Dimensionen in der Rahmentheorie habe ich oben aus den Axiomen bestimmt, d. h. aus der Forderung, daß man in den Lösungen bleibt). Die Transformationen sind parametrisiert durch positive reelle Zahlen, deren Anzahl bestimmt ist als die Zahl der als unabhängig zugelassenen Einheiten, in diesem Fall also 3.

Die Rahmentheorie gibt den Konstanten λ und G Einfluß auf beobachtbare Vorgänge (zumindest für λ werde ich später darauf hinweisen). Damit ist eine „Abstimmung“ zwischen Wirklichkeit und Theorie möglich: man versucht, die Aussagen der Theorie durch Variieren von λ und G optimal an die Beobachtungen anzupassen. Bei ausreichend guter Übereinstimmung wird man die sich so ergebende Theorie als „richtig“ bezeichnen. In diesem Fall und wenn die für λ und G ermittelten Werte ungleich Null sind, dann kann man die zu ihrer Bestimmung benutzten Experimente umkehren: man gibt sich numerische Werte für diese Konstanten vor (mit demselben Vorzeichen wie die gemessenen), und definiert Standards über die Experimente. Mit diesem Vorgehen hat man zwei der drei Skalentransformationen eliminiert. Wählt man aber für λ oder G den Wert 0, dann wird diese Zuordnung unter allen Skalentransformationen erhalten, so daß man keine Einschränkung an die gestatteten Systeme von Einheiten bekommt. Damit sind auch noch mehr Skalentransformationen zugelassen als im anderen Fall: man sagt, daß diese „Untertheorien“ eine größere Skaleninvarianz besitzen als die volle Rahmentheorie. Diese Sprechweise ist allerdings irreführend, denn die so definierte Skaleninvarianz ist keine Eigenschaft der Theorie, sondern ergibt sich aus dem Abgleich mit der Wirklichkeit.

2.2.2. Die metrischen Axiome

Die metrischen Axiome (Axiom 3) befassen sich mit jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einzeln. Trotzdem wird es sich als nützlich erweisen, einige der Aussagen dieses Abschnittes stärker zu formulieren (und zu beweisen), als es zunächst benötigt wird.

Lemma 1. *M sei eine C^{k+1}-Mannigfaltigkeit, $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$.*
$g_{\mu\nu}$, $h^{\alpha\beta}$ seien symmetrische C^k-Tensorfelder auf M, die die metrischen Axiome für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllen.
Gegeben sei ferner ein zeitartiges C^k-Vektorfeld B auf M.

$\Longrightarrow$ *Es gibt für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung U von p und darauf Vektorfelder $\{E_{(\mu)}\}$ und Kovektorfelder $\{E^{(\nu)}\}$ (μ, $\nu \in \{0, \ldots, 3\}$) mit den Eigenschaften:*

(a) *Die $E_{(\mu)}$, $E^{(\nu)}$ sind C^k-Tensorfelder auf U.*

(b) *In jedem Punkt von U bilden die $\{E_{(\mu)}\}$, $\{E^{(\nu)}\}$ zueinander duale Basen von Tangentenraum und Kotangentenraum:*

$$\langle E^{(\mu)}, E_{(\nu)} \rangle = \delta^\mu_\nu. \tag{3}$$

(c) *Für das Vektorfeld B gilt: $B = \sqrt{g(B,B)}E_{(0)}$.*

(d) *Die Komponenten der Metriken bezüglich $\{E_{(\mu)}\}$, $\{E^{(\nu)}\}$ sind:*

$$\begin{aligned} (g_{(\mu\nu)}) &:= \big(g(E_{(\mu)}, E_{(\nu)})\big) = \mathrm{diag}(1, -\lambda, -\lambda, -\lambda), \\ (h^{(\alpha\beta)}) &:= \big(h(E^{(\alpha)}, E^{(\beta)})\big) = \mathrm{diag}(-\lambda, 1, 1, 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Zur Notation in (4): die Klammern um die Indizes in z.B. $g_{(\mu\nu)}$ sollen also andeuten, daß es sich um die Komponenten von $g_{\mu\nu}$ bezüglich einer Tetrade handelt. Die Gefahr der Verwechslung mit Symmetrisierungsklammern ist glücklicherweise nicht gegeben, da die Metriken sowieso symmetrisch sind.

Beweis: Der Beweis orientiert sich am Schmidtschen Orthonormierungsverfahren. Der Unterschied zu letzterem besteht darin, daß man nacheinander nur Teile von $g_{\mu\nu}$ und $h^{\alpha\beta}$ orthonormiert, und die gewonnenen Aussagen mit Hilfe der metrischen Axiome verbindet. Sei

$$E'_{(0)} := \frac{1}{\sqrt{g(B,B)}}\, B.$$

Mit der Kettenregel (bei $k = 0$ meine ich damit die entsprechende Aussage für stetige Funktionen) und $g(B,B) > 0$ folgt, daß $E'_{(0)}$ ein C^k-Tensorfeld auf M und sogar in jeder Karte eine analytische Funktion der Komponenten $g_{\mu\nu}$ und B^α ist.

Sei jetzt $p \in M$. Es gibt dann eine offene Umgebung U von p und darauf C^k-Vektorfelder $E'_{(i)}$, die zusammen mit $E'_{(0)}$ in jedem Punkt von U eine Basis des Tangentenraumes bilden. Um das zu sehen, wähle man eine Karte, die p enthält, und 3 Vektoren in T_pM, die mit $E'_{(0)}|_p$ zusammen T_pM aufspannen. Dann definiert man die $E'_{(i)}$ als die drei Vektorfelder, die in der gewählten Karte als Komponenten die der drei ausgesuchten Vektoren in T_pM haben. Die $E'_{(i)}$ sind dann C^k-Vektorfelder und es gibt eine offene Umgebung U von p, auf der $E'_{(0)}$ und die $E'_{(i)}$ linear unabhängig sind, weil die Determinante der Komponentenmatrix $({E'_{(\mu)}}^\nu)$ eine stetige Funktion der Koordinaten und in p ungleich Null ist. Mit diesen Basisfeldern definiere ich:

$$E''_{(0)} := E'_{(0)}, \qquad E''_{(i)} := E'_{(i)} - g(E'_{(0)}, E'_{(i)})\, E'_{(0)}. \tag{5}$$

Die $E''_{(\mu)}$ sind C^k-Tensorfelder auf U, in der betrachteten Karte analytische Funktionen der Komponenten $g_{\mu\nu}$ und B^α, sie bilden in jedem Punkt von U eine Basis des Tangentenraumes, und es gilt:

$$g(E''_{(0)}, E''_{(0)}) = 1, \qquad g(E''_{(0)}, E''_{(i)}) = 0. \tag{6}$$

Die dualen Basisfelder $E^{(\mu)\prime\prime}$ sind dann gleichfalls C^k-Tensorfelder auf U und analytisch in $g_{\mu\nu}$ und B^α, denn die Koeffizientenmatrix der $E^{(\mu)\prime\prime}$ in einer beliebigen Karte, $({E^{(\mu)\prime\prime}}_\nu)$, ist die inverse Matrix zu $({E''_{(\mu)}}^\nu)$, und die Kettenregel liefert wieder die gewünschte Aussage.

Mit (6) folgt:

$$\psi_g(E''_{(0)}) = E^{(0)\prime\prime},$$

denn aus der Darstellung $\psi_g(E''_{(0)}) = a_\mu E^{(\mu)\prime\prime}$ mit unbestimmten $a_\mu \in \mathbb{R}$ erhält man:

$$a_\mu = \langle \psi_g(E''_{(0)}), E''_{(\mu)} \rangle = g(E''_{(0)}, E''_{(\mu)}) = \delta^0_\mu.$$

Dieses resultiert mit dem dritten metrischen Axiom in:

$$h(E^{(0)\prime\prime}, E^{(\mu)\prime\prime}) = \langle E^{(\mu)\prime\prime}, \psi_h(E^{(0)\prime\prime}) \rangle = \langle E^{(\mu)\prime\prime}, (\psi_h \circ \psi_g)(E''_{(0)}) \rangle = -\lambda\, \delta^\mu_0. \tag{7}$$

Aus

$$H^+_q(E''_{(0)}) = \{\, \omega \in T^*_qM \mid \langle \omega, E''_{(0)} \rangle = 0 \,\} = \mathrm{Span}\{E^{(i)\prime\prime}|_q\}, \quad q \in U$$

kann wegen $g(E''_{(0)}, E''_{(0)}) > 0$ (Gleichung (6)) aus dem zweiten der metrischen Axiome geschlossen werden, daß $h^{\alpha\beta}$ positiv definit auf dem von den $E^{(i)\prime\prime}$ aufgespannten Teilraum von T^*_qM ist. Mit dem Schmidtschen Orthonormierungsverfahren erhält man dann Koeffizienten ${A^i}_j$ und damit neue Vektoren

$$E^{(i)} := {A^i}_j E^{(j)\prime\prime}, \tag{8}$$

die C^k-Tensorfelder auf U, analytisch in $h^{\alpha\beta}$, $g_{\mu\nu}$ und B^α, linear unabhängig und orthonormiert sind:

$$h(E^{(i)}, E^{(j)}) = \delta^{ij}. \tag{9}$$

Mit

$$E^{(0)} := E^{(0)\prime\prime} \tag{10}$$

bekommt man so aus (7,9) die Aussage:

$$\big(h(E^{(\mu)}, E^{(\nu)})\big) = \mathrm{diag}(-\lambda, 1, 1, 1). \tag{11}$$

Die in jedem Punkt von U zu den $\{E^{(\mu)}\}$ duale Basis $\{E_{(\nu)}\}$ besteht dann wieder aus C^k-Vektorfeldern auf U, analytisch in den Komponenten $h^{\alpha\beta}$, $g_{\mu\nu}$ und B^α. Darüber hinaus folgt aus (11), daß

$$E_{(0)} = E'_{(0)}, \qquad E_{(i)} = \psi_h(E^{(i)})$$

gilt: aus der Darstellung $E'_{(0)} = b^\mu E_{(\mu)}$, $b^\mu \in \mathbb{R}$, folgt mit (5,8,10) und der Dualität:

$$b^\mu = \langle E^{(\mu)}, E'_{(0)}\rangle = \delta^\mu_0 \langle E^{(0)\prime\prime}, E''_{(0)}\rangle + \delta^\mu_i A^i{}_j \langle E^{(j)\prime\prime}, E''_{(0)}\rangle = \delta^\mu_0.$$

Ähnlich erhält man die zweite Gleichung aus $\psi_h(E^{(i)}) = c^{i\mu} E_{(\mu)}$, $c^{i\mu} \in \mathbb{R}$, mit Hilfe von (11):

$$c^{i\mu} = \langle E^{(\mu)}, \psi_h(E^{(i)})\rangle = h(E^{(\mu)}, E^{(i)}) = \delta^{\mu i}.$$

Damit folgt für die Komponenten von $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} &g(E_{(0)}, E_{(0)}) = g(E'_{(0)}, E'_{(0)}) = 1, \\ &g(E_{(\mu)}, E_{(i)}) = g(E_{(\mu)}, \psi_h(E^{(i)})) = \langle (\psi_g \circ \psi_h)(E^{(i)}), E_{(\mu)}\rangle = -\lambda\, \delta^i_\mu, \end{aligned}$$

also die letzte ausstehende Behauptung. ■

Mit dem Lemma läßt sich nun der folgende Satz beweisen:

Satz 2. *M sei eine reelle C^{k+1}-Mannigfaltigkeit, $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$; $g_{\mu\nu}$, $h^{\alpha\beta}$ seien symmetrische Tensorfelder auf M.*

Dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:

(a) *$g_{\mu\nu}$ und $h^{\alpha\beta}$ sind C^k-Tensorfelder und erfüllen die metrischen Axiome (Axiom 3).*

(b) *Es gibt zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung U und darauf C^k-Vektorfelder $\{E_{(\mu)}\}$ und C^k-Kovektorfelder $\{E^{(\nu)}\}$, die in jedem Punkt von U zueinander duale Basen bilden, in denen für die Metriken gilt:*

$$\begin{aligned} \big(g(E_{(\mu)}, E_{(\nu)})\big) &= \mathrm{diag}\,\big(1, -\lambda, -\lambda, -\lambda\big), \\ \big(h(E^{(\alpha)}, E^{(\beta)})\big) &= \mathrm{diag}\,\big(-\lambda, 1, 1, 1\big). \end{aligned} \tag{12}$$

Diese Darstellung der Metriken zeigt, daß die Bezeichnungen in Axiom 2 bei $\lambda \geq 0$ sinnvoll sind: die Mengen der raumartigen und der zeitartigen Vektoren sind disjunkt, und die Raum-Richtungen eines Beobachters sind raumartig. Man sieht dann auch, daß ein zeitartiges Vektorfeld auf M benutzt werden kann, um eine Zeitorientierung einzuführen.

Beweis: zunächst in der Richtung (a) $\Longrightarrow$ (b). Sei also $p \in M$. Nach dem ersten metrischen Axiom existiert in T_pM mindestens ein zeitartiger Vektor V. Wählt man eine Karte um p, so kann man ein Vektorfeld B auf dem Definitionsbereich der Karte definieren durch die Forderung, daß seine Komponenten in der Koordinatenbasis dieselben wie die Komponenten von V bezüglich dieser Basis in T_pM sein sollen. B ist dann ein C^k-Vektorfeld, und weil die Metrik $g_{\mu\nu}$ zumindest stetig ist, folgt aus $g(B|_p, B|_p) = g(V,V) > 0$, daß es eine offene Umgebung von p gibt, auf der $g(B,B) > 0$ ist. Auf diese Umgebung wendet man das Lemma 1 an und erhält die Aussage des Satzes.

Sei nun (b) gegeben und $p \in M$ beliebig. Die Darstellung der Metriken in einer Umgebung von p nach (b),

$$g_{\mu\nu} = g(E_{(\sigma)}, E_{(\tau)})\, E^{(\sigma)}{}_\mu E^{(\tau)}{}_\nu, \qquad h^{\alpha\beta} = h(E^{(\sigma)}, E^{(\tau)})\, E_{(\sigma)}{}^\alpha E_{(\tau)}{}^\beta,$$

zeigt, daß sie offensichtlich C^k-Tensorfelder auf dieser Umgebung sind. Da p beliebig war, sind also $g_{\mu\nu}$ und $h^{\alpha\beta}$ C^k-Felder auf ganz M.

Das erste metrische Axiom läßt sich in p sogleich mit $E_{(0)}$ erfüllen:

$$g(E_{(0)}, E_{(0)}) = 1 > 0.$$

Für das zweite sei $V \in T_pM$ mit $g(V,V) > 0$ und

$$H^+(V) = \{\, \omega \in T_p^*M \mid \langle \omega, V\rangle = 0 \,\}.$$

Bei $\lambda < 0$ ist $h^{\alpha\beta}$ positiv definit auf ganz T_p^*M, folglich auch auf $H^+(V)$. Interessant ist also nur der Fall $\lambda \geq 0$. Für $V = V^{(\mu)} E_{(\mu)}$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} & 0 < g(V,V) = (V^{(0)})^2 - \lambda \textstyle\sum_i (V^{(i)})^2 \\ \Longrightarrow \quad & V^{(0)} \neq 0, \qquad \lambda |\vec{v}|^2 < 1 \quad \text{mit} \quad \vec{v} := (V^{(1)}, V^{(2)}, V^{(3)})/V^{(0)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Für jedes $\omega \in H^+(V)$ weiß man, daß:

$$0 = \langle \omega, V\rangle = V^{(0)}(\omega_{(0)} + \omega_{(i)} v^{(i)}) \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_{(0)} = -(\vec{\omega}, \vec{v}). \tag{$*$}$$

Das Skalarprodukt ist das euklidische des $\mathbb{R}^3$. Es folgt:

$$\begin{aligned} h(\omega,\omega) &= -\lambda(\omega_{(0)})^2 + |\vec{\omega}|^2 = -\lambda(\vec{\omega}, \vec{v})^2 + |\vec{\omega}|^2 \\ &\underset{\text{(CSU)}}{\geq} -\lambda|\vec{\omega}|^2|\vec{v}|^2 + |\vec{\omega}|^2 = |\vec{\omega}|^2(1 - \lambda|\vec{v}|^2). \end{aligned}$$

Bei (CSU) wurde die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung benutzt. Da der zweite Faktor laut (13) größer als Null ist, folgt:

$$h(\omega,\omega) \geq 0, \qquad h(\omega,\omega) = 0 \implies \vec{\omega} = \vec{0},$$

mit $(*)$ also:

$$h(\omega,\omega) \geq 0, \qquad h(\omega,\omega) = 0 \implies \omega = 0.$$

Folglich ist $h^{\alpha\beta}$ positiv definit auf $H^+(V)$, und das ist die Forderung des zweiten metrischen Axioms.

Nun zum Beweis der dritten der metrischen Anforderungen:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} h^{\nu\sigma} &= g_{(\rho\tau)}\, E^{(\rho)}{}_{\mu} E^{(\tau)}{}_{\nu}\, h^{(\alpha\beta)}\, E_{(\alpha)}{}^{\nu} E_{(\beta)}{}^{\sigma} \\ &= g_{(\rho\tau)}\, \delta^{\tau}_{\alpha}\, h^{(\alpha\beta)}\, E^{(\rho)}{}_{\mu} E_{(\beta)}{}^{\sigma} \\ &= -\lambda\, \delta^{\beta}_{\rho} E^{(\rho)}{}_{\mu} E_{(\beta)}{}^{\sigma} \\ &= -\lambda\, \delta^{\sigma}_{\mu}. \blacksquare \end{aligned}$$

Eine Anmerkung zu (13): die Ungleichung zeigt dem Kenner, daß bei $\lambda > 0$ der Betrag der Relativgeschwindigkeit zwischen Beobachtern durch $1/\sqrt{\lambda}$ beschränkt ist. Bei $\lambda \leq 0$ gibt es keine solche Einschränkung. Die Allgemeine Relativitätstheorie stellt die (experimentell bestätigte) Behauptung auf, daß die Lichtgeschwindigkeit c eine solche obere Schranke ist. Daher wird man für die AR

$$\lambda = \frac{1}{c^2} \tag{14}$$

setzen. Man beachte, daß diese Bemerkung nur für ein physikalisches Modell sinnvoll ist: man muß ein Einheitensystem haben, c darin ausdrücken, und dann λ nach (14) festlegen, wobei auf der rechten Seite der numerische Wert von c in diesen Einheiten einzusetzen ist.

Wenn ein Beobachter-Feld B gegeben ist, so ist häufig die auf dem zu B orthogonalen Teilraum induzierte Raummetrik von Nutzen. Ich fasse ihre Eigenschaften in dem folgenden Lemma zusammen.

Lemma 2. *Die Axiome 1–3 mögen gelten mit C^k-Metriken $g_{\mu\nu}$, $h^{\alpha\beta}$; $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Gegeben sei ein zeitartiges C^k-Vektorfeld B. Dann folgt:*

(a) *Es existiert auf M genau ein Tensorfeld $\gamma_{\mu\nu}$ mit den Eigenschaften:*
  - (α) $\gamma_{\mu\nu} B^{\nu} = 0$,
  - (β) $\gamma_{\mu\nu} h^{\nu\sigma} \omega_{\sigma} = \omega_{\mu}$ *für jedes* $\omega \in H^+(B)$.

(b) *Für dieses $\gamma_{\mu\nu}$ gilt:*
  - (α) *es ist ein symmetrisches C^k-Tensorfeld auf M,*
  - (β) *es ist positiv semidefinit, positiv definit wenn eingeschränkt auf* $H(B) := \{\, X \in T_pM \mid g(B,X) = 0 \,\}$,
  - (γ) $\pi^{\sigma}_{\mu}\pi^{\tau}_{\nu}\gamma_{\sigma\tau} = \pi^{\sigma}_{\mu}\gamma_{\sigma\nu} = \gamma_{\mu\nu}$, *wobei* $\pi^{\sigma}_{\mu} := \delta^{\sigma}_{\mu} - \frac{B^{\sigma} B^{\bullet}_{\mu}}{g(B,B)}$ *längs B auf $H(B)$ projiziert,*
  - (δ) $\lambda\gamma_{\mu\nu} = \left(\frac{B^{\bullet}_{\mu} B^{\bullet}_{\nu}}{g(B,B)} - g_{\mu\nu}\right)$.

Beweis: (a) Sei $p \in M$. Nach Lemma 1 existiert eine Umgebung U von p und darauf Basis-Tensorfelder $\{E_{(\mu)}\}$, $\{E^{(\nu)}\}$ mit:

$$\langle E^{(\mu)}, E_{(\nu)} \rangle = \delta^\mu_\nu, \qquad B = \sqrt{g(B,B)}\, E_{(0)},$$
$$\big(g_{(\mu\nu)}\big) = \mathrm{diag}(1,-\lambda,-\lambda,-\lambda), \quad \big(h^{(\alpha\beta)}\big) = \mathrm{diag}(-\lambda,1,1,1).$$

Betrachtet man sich $\gamma_{\mu\nu}$ in dieser Basis, so sieht man, daß es in jedem $q \in U$ eindeutig bestimmt ist:

$$\begin{aligned} &\gamma_{\mu\nu} B^\nu = 0 \iff \gamma_{(\mu 0)} = 0, \\ &\omega_\mu = \gamma_{\mu\nu} h^{\nu\sigma} \omega_\sigma \quad \text{für alle } \omega \in H^+(B) \iff \delta^j_\mu = \gamma_{(\mu\nu)} h^{(\nu j)} = \gamma_{(\mu j)} \\ \iff &\big(\gamma_{(\mu\nu)}\big) = \mathrm{diag}(0,1,1,1). \end{aligned} \tag{15}$$

Zum Beweis der Existenz vervollständigt man $E_{(0)} = B/\sqrt{g(B,B)}$ durch drei weitere Vektorfelder $E_{(i)}$ zu einer orthonormierten Basis auf M. Da keine Stetigkeit benötigt wird, kann man die Existenz dieser Felder erhalten, indem man Lemma 1 auf jeden Punkt von M anwendet. In dieser Basis läßt sich dann durch (15) ein $\gamma_{\mu\nu}$ auf M definieren, das die Anforderungen erfüllt.

(b) Die Behauptung (α) läßt sich mit (15) aus

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{(\sigma\tau)} E^{(\sigma)}{}_\mu E^{(\tau)}{}_\nu$$

ablesen. (β) ist ebenfalls aus (15) entnehmbar, nachdem man für die zweite Aussage noch

$$X \in H(B) \iff g(B,X) = 0 \iff g(E_{(0)},X) = 0 \iff \langle E^{(0)}, X \rangle = 0$$

zu Hilfe genommen hat. (γ) folgt aus der geforderten Eigenschaft (aα) und der in (bα) bewiesenen Symmetrie von $\gamma_{\mu\nu}$. Für (δ) beweist man zunächst:

$$\gamma_{\mu\nu} h^{\nu\sigma} = \gamma_{\mu\nu} h^{\nu\tau} \left(\pi^\sigma_\tau + \frac{B^\sigma B^\bullet_\tau}{g(B,B)} \right) = \gamma_{\mu\nu} h^{\nu\tau} \pi^\sigma_\tau - \frac{\lambda}{g(B,B)} \gamma_{\mu\nu} B^\sigma B^\nu = \pi^\sigma_\mu, \tag{16}$$

wie man durch Kontraktion mit einem beliebigen ω_σ sehen kann, da $\pi^\sigma_\mu \omega_\sigma \in H^+(B)$ gilt. Diese Gleichung kontrahiert man mit $g_{\sigma\tau}$ und erhält:

$$-\lambda \gamma_{\mu\tau} = \left(\delta^\sigma_\mu - \frac{B^\sigma B^\bullet_\mu}{g(B,B)} \right) g_{\sigma\tau} = g_{\mu\tau} - \frac{B^\bullet_\mu B^\bullet_\tau}{g(B,B)}. \ \blacksquare$$

Zur späteren Verwendung sei auch noch

$$k^{\alpha\beta} := h^{\alpha\beta} + \lambda \frac{B^\alpha B^\beta}{g(B,B)} \tag{17}$$

eingeführt, das kontravariante Gegenstück von $\gamma_{\mu\nu}$:

$$k^{\alpha\beta} B^\bullet_\beta = 0, \qquad \gamma_{\mu\nu} k^{\nu\sigma} = \pi^\sigma_\mu. \tag{18}$$

Die Gleichungen (18) charakterisieren $k^{\alpha\beta}$ eindeutig. Genau wie bei $\gamma_{\mu\nu}$ kann man damit eine Darstellung herleiten, aus der man entnimmt, daß $k^{\alpha\beta}$ positiv semidefinit auf T^*_pM und positiv definit auf $H^+(B)$ ist.

2.2.3. Die Zusammenhangsaxiome

Während bei $\lambda \neq 0$ das Axiom (4a) den Zusammenhang bekanntlich durch die Metriken und ihre ersten Ableitungen festlegt, ist das bei $\lambda = 0$ nur zum Teil der Fall. Aus diesem Grund empfiehlt es sich, den Zusammenhang in zwei Teile zu zerlegen. Der Übersichtlichkeit halber soll dies zunächst unabhängig von der Rahmentheorie geschehen.

Definition 2. *M sei eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

(a) Ein Tensor π^μ_ν heiße <u>Projektion</u>, wenn die Abbildung

$$\hat{\pi} : T_pM \to T_pM, \qquad \langle \omega, \hat{\pi}(X) \rangle := \pi(\omega, X)$$

die Eigenschaft

$$\hat{\pi} \circ \hat{\pi} = \hat{\pi} \tag{19}$$

besitzt, d. h. idempotent ist. Die von $\hat{\pi}$ in allen Tensorräumen induzierten Abbildungen bezeichne ich wieder mit $\hat{\pi}$. Ferner sei $\hat{\pi}(f) := f$ für Skalare f.

(b) Für eine differenzierbare Projektion π definiere die Abbildung

$$D(X, Y) := [\hat{\pi}(X), \hat{\pi}(Y)] - \hat{\pi}\left([\hat{\pi}(X), \hat{\pi}(Y)]\right) \tag{20}$$

den <u>Defekt-Tensor</u> D von π als $D(\omega, X, Y) := \langle \omega, D(X, Y) \rangle$. ($[..., ...]$ ist der Kommutator von Vektorfeldern.)

(c) Sei ∇ ein linearer Zusammenhang und π eine differenzierbare Projektion. Die <u>mit π aus ∇ projizierte Ableitung $\widetilde{\nabla}$</u> sei:

$$\widetilde{\nabla} S := \hat{\pi}\big(\nabla(\hat{\pi}(S))\big) \tag{21}$$

für jedes differenzierbare Tensorfeld S. In Komponenten schreibe ich:

$$S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta\|\epsilon} := \pi^\alpha_\mu \cdots \pi^\beta_\nu \pi^\sigma_\gamma \cdots \pi^\tau_\delta \, (\pi^\mu_\zeta \cdots \pi^\nu_\eta \pi^\theta_\sigma \cdots \pi^\iota_\tau S^{\zeta\cdots\eta}{}_{\theta\ldots\iota})_{;\kappa} \pi^\kappa_\epsilon. \tag{22}$$

(Liest das hier jemand, der stets auf die Indexschreibweise schwört?)

Die Eigenschaft (19) garantiert, daß Bildraum und Kern von $\hat{\pi}$ linear unabhängig sind, so daß π an jeder Stelle der Mannigfaltigkeit eine Zerlegung des Tangentenraumes bestimmt:

$$T_pM = \text{Bild}\,\hat{\pi} \oplus \text{Kern}\,\hat{\pi}.$$

Wem diese Darstellung zu asymmetrisch ist, der kann die zu π komplementäre Projektion $\acute{\pi}^\mu_\nu := \delta^\mu_\nu - \pi^\mu_\nu$ benutzen, um $T_pM = \text{Bild}\,\hat{\pi} \oplus \text{Bild}\,\hat{\pi}' = \text{Kern}\,\hat{\pi}' \oplus \text{Kern}\,\hat{\pi}$ zu schreiben. Umgekehrt kann man auch bei Vorliegen einer solchen Zerlegung der Tangentenräume in direkte Summen Projektionen definieren.

Die Definition (21) scheint zuerst von R. Geroch verwendet worden zu sein, und zwar zunächst [3] für den Spezialfall eines metrischen Zusammenhangs, mit einem aus einem Killing-Vektor erzeugten π, und für Tensoren S mit $\hat{\pi}(S) = S$, deren Lie-Ableitung nach dem Killing-Vektor verschwindet.

Das folgende Lemma soll die Bezeichnung „Defekt-Tensor“ rechtfertigen.

Lemma 3. *M sei eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und π eine differenzierbare Projektion.*

(a) Der Defekt-Tensor D von π ist ein Tensor. Seine Komponenten sind:

$$D^\alpha_{\beta\gamma} = 2\pi^\mu_\beta \pi^\nu_\gamma \pi^\alpha_{[\nu,\mu]}. \tag{23}$$

(b) $D = 0 \iff$ Die Bildräume von $\hat{\pi}$ bilden eine integrable Distribution auf M.

Beweis: (a) Die folgende Rechnung zeigt die Linearität von $D(X,Y)$ und beschert uns gleichzeitig die Komponenten:

$$\begin{aligned}
\langle dx^\alpha, D(X,Y)\rangle &= (\delta^\alpha_\mu - \pi^\alpha_\mu)\Big((\pi^\mu_\gamma Y^\gamma)_{,\nu}\pi^\nu_\beta X^\beta - (\pi^\mu_\beta X^\beta)_{,\nu}\pi^\nu_\gamma Y^\gamma\Big) \\
&= (\delta^\alpha_\mu - \pi^\alpha_\mu)(\pi^\mu_{\gamma,\nu}\pi^\nu_\beta - \pi^\mu_{\beta,\nu}\pi^\nu_\gamma)X^\beta Y^\gamma \\
&= (\pi^\alpha_{\mu,\nu}\pi^\mu_\gamma\pi^\nu_\beta - \pi^\alpha_{\mu,\nu}\pi^\mu_\beta\pi^\nu_\gamma)X^\beta Y^\gamma \\
\iff D^\alpha_{\beta\gamma} &= \pi^\mu_\beta\pi^\nu_\gamma(\pi^\alpha_{\nu,\mu} - \pi^\alpha_{\mu,\nu}).
\end{aligned}$$

(b) (Für die Bezeichnungsweise siehe das Kapitel 6 bei Spivak [4].) Wählt man ein $p \in M$ und in T_pM eine Basis $\{E_{(\mu)}|_p\}$, $1 \le \mu \le n := \dim M$, mit der Eigenschaft, daß

$$\hat{\pi}(E_{(\mu)}|_p) = \begin{cases} E_{(\mu)}|_p & \text{für } 1 \le \mu \le m \le n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei m die Dimension von $\operatorname{Bild}\hat{\pi}$ in p sein soll, so sieht man, daß für die Spur von π gilt:

$$\operatorname{Sp}\pi = \pi^\mu_\mu = m.$$

Also nimmt $\operatorname{Sp}\pi : M \to \mathbb{R}$ nur Werte in $\mathbb{N}_0$ an. Da π stetig ist, gilt das auch für $\operatorname{Sp}\pi$, so daß $\operatorname{Sp}\pi$ zusammenhängende Teilmengen von M in zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$ abbildet (siehe z.B. Querenburg [5], Satz 4.9). Die einzigen Teilmengen von $\mathbb{N}_0$, die in $\mathbb{R}$ zusammenhängend sind, bestehen aber nur aus einem einzigen Punkt, so daß $\operatorname{Sp}\pi$ und damit die Dimension der Bildräume von $\hat{\pi}$ auf jeder Zusammenhangskomponente von M konstant ist. Also bilden die Bildräume von $\hat{\pi}$ auf jeder Zusammenhangskomponente K von M eine $m(K)$-dimensionale Distribution.

Der Rest ist noch einfacher: eine Distribution heißt genau dann integrabel, wenn der Kommutator jedes Paares von Vektorfeldern in der Distribution wieder in der Distribution liegt. Nichts anderes wird durch $D = 0$ ausgedrückt. ■

Eine Ableitung wie in Definition 2(c) ist zwar für Tensoren jeglicher Art definiert, aber im allgemeinen Fall nicht für alle auch eine kovariante Ableitung (außer bei $\hat{\pi} = \mathrm{id}$). Das folgende Lemma beschreibt die Eigenschaften von $\widetilde{\nabla}$ genauer.

Lemma 4. *M sei eine C^{k+2}-Mannigfaltigkeit, $k \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$; ∇ sei ein C^k-Zusammenhang, und π^μ_ν sei eine C^{k+1}-Projektion auf M.*

Für die mit π aus ∇ projizierte Ableitung $\widetilde{\nabla}$ gilt:

(a) *Für alle C^l-Tensorfelder S vom Typ (r, s), $1 \leq l \leq k+1$, ist $\widetilde{\nabla} S$ ein C^{l-1}-Tensorfeld vom Typ $(r, s+1)$. Insbesondere gilt für Skalarfelder f, g, Vektorfelder X, Y, und Tensorfelder S:*

$$\widetilde{\nabla}_{fX+gY} S = f \widetilde{\nabla}_X S + g \widetilde{\nabla}_Y S.$$

(b)
$$\hat{\pi}\big(\widetilde{\nabla}\hat{\pi}(S)\big) = \widetilde{\nabla} S, \qquad \widetilde{\nabla}\pi = 0.$$

(c) *Für Tensorfelder S, T und Skalare f findet man:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}(S+T) &= \widetilde{\nabla} S + \widetilde{\nabla} T,\\
\widetilde{\nabla}(S \otimes T) &= \widetilde{\nabla} S \otimes \hat{\pi}(T) + \hat{\pi}(S) \otimes \widetilde{\nabla} T,\\
(S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\mu\ldots\delta})_{\|\epsilon} &= \delta^\nu_\mu \, S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\nu\ldots\delta\|\epsilon} + \big((\delta^\nu_\mu - \pi^\nu_\mu) S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\nu\ldots\delta}\big)_{\|\epsilon},\\
\widetilde{\nabla} f &= \hat{\pi}(df).
\end{aligned}$$

(d) *Für die „Zusammenhangskomponenten" ergibt sich in einer Koordinatenbasis:*

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} := \langle dx^\alpha, \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}} \tfrac{\partial}{\partial x^\gamma}\rangle = \pi^\alpha_\mu \pi^\mu_{\gamma,\sigma} \pi^\sigma_\beta + \pi^\alpha_\mu \Gamma^\mu_{\sigma\tau} \pi^\sigma_\beta \pi^\tau_\gamma,$$

wobei natürlich $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} := \langle dx^\alpha, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}} \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\rangle$ sein soll. Es folgt dann zum Beispiel:

$$V^\alpha{}_{\|\beta} = \pi^\alpha_\mu V^\mu{}_{,\nu} \pi^\nu_\beta + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\sigma} V^\sigma. \tag{24}$$

(e) *Die Abbildung*

$$\widetilde{T}(X, Y) := \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X - \hat{\pi}\big([\hat{\pi}(X), \hat{\pi}(Y)]\big) \tag{25}$$

definiert einen C^k-Tensor $\widetilde{T}(\omega, X, Y) := \langle \omega, \widetilde{T}(X, Y)\rangle$, die „Torsion" ($X$, Y seien C^{k+1}-Vektorfelder). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}^\alpha_{\beta\gamma} &= \pi^\alpha_\mu T^\mu_{\sigma\tau} \pi^\sigma_\beta \pi^\tau_\gamma,\\
f_{\|\alpha\beta} - f_{\|\beta\alpha} &= (\widetilde{T}^\mu_{\alpha\beta} - D^\mu_{\alpha\beta}) f_{,\mu}.
\end{aligned}$$

Dabei sei $T^\alpha_{\beta\gamma}$ der übliche Torsionstensor von ∇, d.h. auf dieselbe Art wie $\widetilde{T}^\alpha_{\beta\gamma}$ definiert, nur speziell mit $\hat{\pi} = \mathrm{id}$.

(f) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X, Y) Z := \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) - \widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X Z) &- \widetilde{\nabla}_{[\hat{\pi}(X), \hat{\pi}(Y)]} Z\\
&- \hat{\pi}\left([D(X, Y), \hat{\pi}(Z)]\right)
\end{aligned} \tag{26}$$

definiert durch $\widetilde{R}(\omega, X, Y, Z) := \langle\omega, \widetilde{R}(X,Y)Z\rangle$ einen C^{k-1}-Tensor, die „Krümmung“ von $\widetilde{\nabla}$. (X, Y, Z seien C^{k+1}-Vektorfelder.) Es gilt:

$$\widetilde{R}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \pi^{\alpha}_{\mu}\pi^{\nu}_{\beta}\pi^{\sigma}_{\gamma}\pi^{\tau}_{\delta}\left(R^{\mu}{}_{\nu\sigma\tau} + \pi^{\mu}_{\eta;\sigma}\pi^{\eta}_{\nu;\tau} - \pi^{\mu}_{\eta;\tau}\pi^{\eta}_{\nu;\sigma} + (T^{\mu}_{\eta\nu} - \pi^{\mu}_{\eta;\nu})D^{\eta}_{\sigma\tau}\right)$$

$$Z^{\alpha}{}_{\|\gamma\delta} - Z^{\alpha}{}_{\|\delta\gamma} - Z^{\alpha}{}_{\|\mu}\widetilde{T}^{\mu}_{\gamma\delta} = -\widetilde{R}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\, Z^{\beta} - D^{\mu}_{\gamma\delta}\left(2\pi^{\alpha}_{[\mu,\sigma]}\pi^{\sigma}_{\beta}Z^{\beta} + (\pi^{\alpha}_{\beta}Z^{\beta})_{,\mu}\right)$$

$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ sei durch $\widetilde{R}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ bei $\hat{\pi} = \mathrm{id}$ erklärt, d.h. es ist der Riemann-Tensor von ∇.

Ich habe für dieses Lemma nicht notwendig torsionsfreie Zusammenhänge betrachtet, damit man sieht, daß man sich des Defekt-Tensors nicht dadurch entledigen kann, daß man ihn zur „Torsion“ schlägt. Außerdem erkennt man, daß $\widetilde{\nabla}$ auf den Tensoren S mit $\hat{\pi}(S) = S$ (mit Ausnahme der Skalare) wie eine kovariante Ableitung wirkt. Bei Verschwinden des Defekttensors von π bedeutet dies insbesondere, daß $\widetilde{\nabla}$ in den Integral-Mannigfaltigkeiten von Bild $\hat{\pi}$ lineare Zusammenhänge definiert.

Beweis: (a) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von ∇. Der erste Teil von (b) ergibt sich direkt aus der Definition von $\widetilde{\nabla}$, den zweiten findet man so:

$$\begin{aligned} \pi^{\mu}_{\nu}\pi^{\nu}_{\sigma} \underset{(19)}{=} \pi^{\mu}_{\sigma} &\implies \pi^{\mu}_{\nu;\tau}\pi^{\nu}_{\sigma} + \pi^{\mu}_{\nu}\pi^{\nu}_{\sigma;\tau} = \pi^{\mu}_{\sigma;\tau} \\ &\implies \pi^{\mu}_{\nu;\tau}\pi^{\nu}_{\rho} + \pi^{\mu}_{\nu}\pi^{\nu}_{\sigma;\tau}\pi^{\sigma}_{\rho} = \pi^{\mu}_{\sigma;\tau}\pi^{\sigma}_{\rho} \\ &\iff \pi^{\mu}_{\nu}\pi^{\nu}_{\sigma;\tau}\pi^{\sigma}_{\rho} = 0 \\ &\implies \pi^{\mu}_{\sigma\|\tau} = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

(c) ist mehr oder weniger offensichtlich. Für die Produktregel lautet der Beweis:

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}(S\otimes T) &= \hat{\pi}\big(\nabla(\hat{\pi}(S\otimes T))\big) = \hat{\pi}\big(\nabla(\hat{\pi}(S)\otimes\hat{\pi}(T))\big) = \\ &= \hat{\pi}\Big(\nabla(\hat{\pi}(S))\otimes\hat{\pi}(T) + \hat{\pi}(S)\otimes\big(\nabla(\hat{\pi}(T))\big)\Big) \\ &= \hat{\pi}\big(\nabla(\hat{\pi}(S))\big)\otimes\hat{\pi}(T) + \hat{\pi}(S)\otimes\hat{\pi}\big(\nabla(\hat{\pi}(T))\big) \\ &= \widetilde{\nabla}S\otimes\hat{\pi}(T) + \hat{\pi}(S)\otimes\widetilde{\nabla}T. \end{aligned}$$

Und für die Kontraktion:

$$\begin{aligned} &(S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\mu\ldots\delta})_{\|\epsilon} = (\delta^{\nu}_{\mu}\, S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\nu\ldots\delta})_{\|\epsilon} = \\ &= \left(\left((\delta^{\nu}_{\mu} - \pi^{\nu}_{\mu}) + \pi^{\nu}_{\mu}\right) S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\nu\ldots\delta}\right)_{\|\epsilon} \\ &= \left((\delta^{\nu}_{\mu} - \pi^{\nu}_{\mu})\, S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\nu\ldots\delta}\right)_{\|\epsilon} + \pi^{\nu}_{\mu\|\epsilon}\hat{\pi}(S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\nu\ldots\delta}) + \pi^{\nu}_{\mu}\, S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\nu\ldots\delta\|\epsilon} \\ &= \delta^{\nu}_{\mu}\, S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\nu\ldots\delta\|\epsilon} + \left((\delta^{\nu}_{\mu} - \pi^{\nu}_{\mu})\, S^{\alpha\ldots\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\nu\ldots\delta}\right)_{\|\epsilon} \end{aligned}$$

(d) ist leicht direkt zu bestätigen.

Um zu beweisen, daß die „Torsion“ $\widetilde{T}$ ein Tensor ist, muß man die Linearität von $\widetilde{T}(X,Y)$ zeigen. Additivität ist gegeben, es bleibt also nur die Homogenität:

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(fX,Y) &= \widetilde{\nabla}_{fX}Y - \widetilde{\nabla}_{Y}(fX) - \hat{\pi}\left([\hat{\pi}(fX),\hat{\pi}(Y)]\right) \\ &= f\widetilde{\nabla}_{X}Y - \widetilde{\nabla}_{Y}f\cdot\hat{\pi}(X) - f\widetilde{\nabla}_{Y}X - f\hat{\pi}\left([\hat{\pi}(X),\hat{\pi}(Y)]\right) + \langle df,\hat{\pi}(Y)\rangle\,\hat{\pi}(X) \\ &= f\widetilde{T}(X,Y). \end{aligned}$$

Das zweite Argument braucht man wegen der Antisymmetrie nicht zu betrachten. Die Komponenten ergeben sich aus:

$$\widetilde{T}(X,Y) = \hat{\pi}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - [\widetilde{X},\widetilde{Y}]\right) = \hat{\pi}(T(\widetilde{X},\widetilde{Y}))$$

($\widetilde{X} := \hat{\pi}(X)$, usw.). Und man findet:

$$\begin{aligned}(f_{\|\alpha\beta} - f_{\|\beta\alpha})X^\alpha Y^\beta &= (f_{\|\alpha}X^\alpha)_{\|\beta}Y^\beta - f_{\|\alpha}X^\alpha{}_{\|\beta}Y^\beta - (f_{\|\beta}Y^\beta)_{\|\alpha}X^\alpha + f_{\|\beta}Y^\beta{}_{\|\alpha}X^\alpha \\ &= f_{\|\mu}\left(\widetilde{T}^\mu_{\sigma\tau}X^\sigma Y^\tau + [\widetilde{X},\widetilde{Y}]^\mu + (f_{\|\alpha}X^\alpha)_{\|\beta}Y^\beta - (f_{\|\beta}Y^\beta)_{\|\alpha}X^\alpha\right) \\ &= f_{,\mu}(\widetilde{T}^\mu_{\alpha\beta} - D^\mu_{\alpha\beta})X^\alpha Y^\beta,\end{aligned}$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y f) - \widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X f) - \widetilde{\nabla}_{[\hat{\pi}(X),\hat{\pi}(Y)]}f \\ &= (f_{,\nu}\widetilde{Y}^\nu)_{,\mu}\widetilde{X}^\mu - (f_{,\mu}\widetilde{X}^\mu)_{,\nu}\widetilde{Y}^\nu - f_{,\sigma}\pi^\sigma_\tau\,(\widetilde{Y}^\tau{}_{,\mu}\widetilde{X}^\mu - \widetilde{X}^\tau{}_{,\nu}\widetilde{Y}^\nu) \\ &= f_{,\sigma}(\delta^\sigma_\tau - \pi^\sigma_\tau)(\widetilde{Y}^\tau{}_{,\mu}\widetilde{X}^\mu - \widetilde{X}^\tau{}_{,\nu}\widetilde{Y}^\nu) \\ &= f_{,\sigma}(\delta^\sigma_\tau - \pi^\sigma_\tau)\left(\pi^\tau_{\nu,\mu}\pi^\mu_\eta - \pi^\tau_{\eta,\rho}\pi^\rho_\nu\right)Y^\nu X^\eta \\ &= f_{,\sigma}\left(\pi^\sigma_{\tau,\rho}\pi^\tau_\nu\pi^\rho_\mu - \pi^\sigma_{\tau,\rho}\pi^\tau_\mu\pi^\rho_\nu\right)X^\mu Y^\nu \\ &= f_{,\sigma}\pi^\tau_\mu\pi^\rho_\nu(\pi^\sigma_{\rho,\tau} - \pi^\sigma_{\tau,\rho})X^\mu Y^\nu \\ &= f_{,\sigma}D^\sigma_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu \\ &= \langle df, D(X,Y)\rangle. \end{aligned} \tag{28}$$

Nun zur „Krümmung“. Die Additivität von $\widetilde{R}(X,Y)Z$ ist offensichtlich. Für die Homogenität braucht man (wieder sei $\widetilde{X} := \hat{\pi}(X)$, etc.):

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(fX,Y)Z &= \widetilde{\nabla}_{fX}(\widetilde{\nabla}_Y Z) - \widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_{fX}Z) - \widetilde{\nabla}_{[f\widetilde{X},\widetilde{Y}]}Z - \hat{\pi}([D(fX,Y),\widetilde{Z}]) \\ &= f\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) - \widetilde{\nabla}_Y f\cdot\widetilde{\nabla}_X Z - f\widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X Z) - f\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}Z + \langle df,\widetilde{Y}\rangle\,\widetilde{\nabla}_X Z \\ &\qquad - f\,\hat{\pi}\left([D(X,Y),\widetilde{Z}]\right) + \langle df,\widetilde{Z}\rangle\,\hat{\pi}\big(D(X,Y)\big) \\ &= f\,\widetilde{R}(X,Y)Z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)(fZ) &= \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y(fZ)) - \widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X(fZ)) - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}(fZ) - \hat{\pi}([D(X,Y),f\widetilde{Z}]) \\ &= \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y f\cdot Z + f\widetilde{\nabla}_Y Z) - \widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X f\cdot Z + f\widetilde{\nabla}_X Z) - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}f\cdot\widetilde{Z} \\ &\qquad - f\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}Z - \hat{\pi}\left(f[D(X,Y),\widetilde{Z}] + \langle df, D(X,Y)\rangle\,\widetilde{Z}\right) \\ &= f\,\widetilde{R}(X,Y)Z + \left(\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y f) - \widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X f) - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}f - \langle df, D(X,Y)\rangle\right)\widetilde{Z} \\ &\underset{(28)}{=} f\,\widetilde{R}(X,Y)Z.\end{aligned}$$

Für die Verbindung zum Krümmungstensor von ∇ benötigt man zunächst:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) - \widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X Z) - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]} Z - \hat{\pi}\big([D(X,Y),\widetilde{Z}]\big) \\
&= \hat{\pi}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\big(\hat{\pi}(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z})\big) - \nabla_{\widetilde{Y}}\big(\hat{\pi}(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})\big) - \nabla_{\hat{\pi}([\widetilde{X},\widetilde{Y}])}\widetilde{Z} - [D(X,Y),\widetilde{Z}]\right) \\
&= \hat{\pi}\Big(\nabla_{\widetilde{X}}(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}) - \nabla_{\widetilde{Y}}(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}) - \nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z} + (\widehat{\nabla_{\widetilde{X}}\pi})(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}) - (\widehat{\nabla_{\widetilde{Y}}\pi})(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}) \\
&\qquad + \nabla_{(\mathrm{id}-\hat{\pi})([\widetilde{X},\widetilde{Y}])}\widetilde{Z} - [D(\widetilde{X},\widetilde{Y}),\widetilde{Z}]\Big) \\
&= \hat{\pi}\left(R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} + (\widehat{\nabla_{\widetilde{X}}\pi})(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}) - (\widehat{\nabla_{\widetilde{Y}}\pi})(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}) + \nabla_{D(X,Y)}\widetilde{Z} - [D(X,Y),\widetilde{Z}]\right).
\end{aligned}$$

Dabei soll $\widehat{\nabla_{\widetilde{X}}\pi}$ der von $\nabla_{\widetilde{X}}\pi$ induzierte Endomorphismus auf dem Tangentenraum sein (genau wie $\hat{\pi}$ zu π). Man findet:

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}\left((\widehat{\nabla_{\widetilde{X}}\pi})(\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z})\right)^\alpha &= \pi^\alpha_\mu \pi^\mu_{\nu;\gamma}\widetilde{X}^\gamma \widetilde{Z}^\nu{}_{;\delta}\widetilde{Y}^\delta \\
&= \pi^\alpha_\mu \pi^\mu_{\nu;\gamma}\big(\pi^\nu_\beta + (\delta^\nu_\beta - \pi^\nu_\beta)\big)\widetilde{Z}^\beta{}_{;\delta}\widetilde{X}^\gamma\widetilde{Y}^\delta \\
&\underset{(27)}{=} \pi^\alpha_\mu \pi^\mu_{\nu;\gamma}\pi^\nu_{\beta;\delta}\widetilde{X}^\gamma\widetilde{Y}^\delta\widetilde{Z}^\beta
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}\left(\nabla_{D(X,Y)}\widetilde{Z} - [D(X,Y),\widetilde{Z}]\right) &= \hat{\pi}\left(\nabla_{\widetilde{Z}}D(X,Y) + T(D(X,Y),\widetilde{Z})\right) \\
&= \hat{\pi}\big(T(D(X,Y),\widetilde{Z})\big) - (\widehat{\nabla_{\widetilde{Z}}\pi})(D(X,Y)).
\end{aligned}$$

Oben eingesetzt ergibt sich:

$$\widetilde{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \pi^\alpha_\mu\pi^\nu_\beta\pi^\sigma_\gamma\pi^\tau_\delta\left(R^\mu{}_{\nu\sigma\tau} + \pi^\mu_{\eta;\sigma}\pi^\eta_{\nu;\tau} - \pi^\mu_{\eta;\tau}\pi^\eta_{\nu;\sigma} + T^\mu_{\eta\nu}D^\eta_{\sigma\tau} - \pi^\mu_{\eta;\nu}D^\eta_{\sigma\tau}\right).$$

Und schließlich:

$$\begin{aligned}
&(Z^\alpha{}_{\Vert\gamma\delta} - Z^\alpha{}_{\Vert\delta\gamma} - Z^\alpha{}_{\Vert\mu}\widetilde{T}^\mu_{\gamma\delta})X^\gamma Y^\delta \\
&= (Z^\alpha{}_{\Vert\gamma}X^\gamma)_{\Vert\delta}Y^\delta - Z^\alpha{}_{\Vert\gamma}X^\gamma{}_{\Vert\delta}Y^\delta - (Z^\alpha{}_{\Vert\delta}Y^\delta)_{\Vert\gamma}X^\gamma + Z^\alpha{}_{\Vert\delta}Y^\delta{}_{\Vert\gamma}X^\gamma - Z^\alpha{}_{\Vert\mu}\widetilde{T}^\mu_{\gamma\delta}X^\gamma Y^\delta \\
&= -\widetilde{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}Z^\beta X^\gamma Y^\delta - Z^\alpha{}_{\Vert\mu}[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^\mu - \hat{\pi}\big([D(X,Y),\widetilde{Z}]\big)^\alpha \\
&\qquad + Z^\alpha{}_{\Vert\mu}(Y^\mu{}_{\Vert\gamma}X^\gamma - X^\mu{}_{\Vert\delta}Y^\delta - \widetilde{T}^\mu_{\gamma\delta}X^\gamma Y^\delta) \\
&= -\widetilde{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}Z^\beta X^\gamma Y^\delta - \hat{\pi}\big([D(X,Y),\widetilde{Z}]\big)^\alpha.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man mit

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}\big([D(X,Y),\widetilde{Z}]\big)^\alpha &= \pi^\alpha_\mu\left(\widetilde{Z}^\mu{}_{,\nu}D^\nu_{\gamma\delta}X^\gamma Y^\delta - (D^\mu_{\gamma\delta}X^\gamma Y^\delta)_{,\sigma}\widetilde{Z}^\sigma\right) \\
&= \pi^\alpha_\mu\widetilde{Z}^\mu{}_{,\nu}D^\nu_{\gamma\delta}X^\gamma Y^\delta + \pi^\alpha_{\mu,\sigma}D^\mu_{\gamma\delta}X^\gamma Y^\delta\widetilde{Z}^\sigma \\
&= D^\mu_{\gamma\delta}(\pi^\alpha_\sigma\widetilde{Z}^\sigma{}_{,\mu} + \pi^\alpha_{\mu,\sigma}\widetilde{Z}^\sigma)X^\gamma Y^\delta \\
&= D^\mu_{\gamma\delta}\left((\pi^\alpha_\sigma Z^\sigma)_{,\mu} + (\pi^\alpha_{\mu,\sigma} - \pi^\alpha_{\sigma,\mu})\pi^\sigma_\tau Z^\tau\right)X^\gamma Y^\delta
\end{aligned}$$

die letzte Behauptung des Lemmas. ■

Im weiteren beschränke ich mich auf torsionsfreie Zusammenhänge und die einfachste nichttriviale Projektion. Für diesen Fall beschreibt das nächste Lemma die Zerlegung der kovarianten Ableitung in handlichere Teile.

Lemma 5. *M sei eine C^{k+2}-Mannigfaltigkeit, $k \in \overline{\mathbb{N}}$; ∇ sei ein torsionsfreier C^k-Zusammenhang; B ein C^{k+1}-Vektorfeld, ω ein C^{k+1}-Kovektorfeld und beide zusammen erfüllen $\langle \omega, B \rangle = 1$.*

Es sei:

$$\begin{aligned} \pi^\alpha_\beta &:= \delta^\alpha_\beta - B^\alpha \omega_\beta, \qquad \chi_{\mu\nu} := -\pi^\sigma_\nu \pi^\tau_\mu \omega_{\sigma;\tau}, \\ \Delta^\alpha_{\beta\gamma} &:= 2B^\alpha{}_{;(\beta}\, \omega_{\gamma)} - B^\alpha{}_{;\mu} B^\mu\, \omega_\beta \omega_\gamma + B^\alpha \chi_{\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{29}$$

Dann gilt:

(a) π ist eine C^{k+1}-Projektion mit dem Defekt-Tensor

$$D^\alpha_{\beta\gamma} = 2B^\alpha\, \chi_{[\beta\gamma]}. \tag{30}$$

(b) Für die mit π aus ∇ projizierte Ableitung $\widetilde{\nabla}$ findet man unter anderem:

$$\begin{aligned} V^\alpha{}_{;\beta} - V^\alpha{}_{\|\beta} &= (\mathcal{L}_B V)^\alpha \omega_\beta + B^\alpha (\omega_\mu V^\mu)_{\|\beta} + \Delta^\alpha_{\beta\mu} V^\mu, \\ \varphi_{\alpha;\beta} - \varphi_{\alpha\|\beta} &= (\mathcal{L}_B \varphi)_\alpha \omega_\beta + \omega_\alpha (B^\mu \varphi_\mu)_{\|\beta} - \Delta^\mu_{\beta\alpha} \varphi_\mu. \end{aligned} \tag{31}$$

($\mathcal{L}_B$ soll natürlich die Lie-Ableitung nach B sein.) Speziell für einen Tensor, der mit B oder ω über jeden Index einzeln kontrahiert Null ergibt, erhält man:

$$\begin{aligned} &S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta;\epsilon} - S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta\|\epsilon} \\ &= (\mathcal{L}_B S)^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta}\, \omega_\epsilon + \Delta^\alpha_{\epsilon\mu} S^{\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} + \ldots + \Delta^\beta_{\epsilon\mu} S^{\alpha\ldots\mu}{}_{\gamma\ldots\delta} \\ &\qquad - \Delta^\mu_{\epsilon\gamma} S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\mu\ldots\delta} - \ldots - \Delta^\mu_{\epsilon\delta} S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\mu}. \end{aligned} \tag{32}$$

Beweis: (a) ist schnell erledigt:

$$D^\alpha_{\beta\gamma} = 2\pi^\mu_\beta \pi^\nu_\gamma \pi^\alpha_{[\nu,\mu]} = 2\pi^\mu_\beta \pi^\nu_\gamma B^\alpha \omega_{[\mu,\nu]} = 2B^\alpha\, \chi_{[\beta\gamma]}.$$

Dabei wurde zum Schluß die Symmetrie von ∇ benutzt. Für (b) findet sich:

$$\begin{aligned} &V^\alpha{}_{;\beta} - V^\alpha{}_{\|\beta} \\ &= V^\alpha{}_{;\beta} - \pi^\alpha_\mu (\pi^\mu_\nu V^\nu)_{;\sigma} \pi^\sigma_\beta \\ &= V^\alpha{}_{;\beta} - \pi^\alpha_\mu \pi^\mu_{\nu;\sigma} \pi^\sigma_\beta V^\nu - \pi^\alpha_\nu V^\nu{}_{;\sigma} \pi^\sigma_\beta \\ &= V^\alpha{}_{;\beta} - (V^\alpha{}_{;\sigma} - B^\alpha \omega_\nu V^\nu{}_{;\sigma}) \pi^\sigma_\beta - \pi^\alpha_\mu \pi^\mu_{\nu;\sigma} \pi^\sigma_\beta V^\nu \\ &= V^\alpha{}_{;\sigma} B^\sigma \omega_\beta + B^\alpha (\omega_\nu V^\nu)_{;\sigma} \pi^\sigma_\beta - (B^\alpha \omega_{\nu;\sigma} \pi^\sigma_\beta + \pi^\alpha_\mu \pi^\mu_{\nu;\sigma} \pi^\sigma_\beta) V^\nu \\ &= (\mathcal{L}_B V)^\alpha \omega_\beta + B^\alpha (\omega_\mu V^\mu)_{\|\beta} + \left(B^\alpha{}_{;\nu}\, \omega_\beta - B^\alpha \omega_{\nu;\sigma} \pi^\sigma_\beta + \pi^\alpha_\mu B^\mu{}_{;\sigma} \omega_\nu \pi^\sigma_\beta\right) V^\nu \\ &= (\mathcal{L}_B V)^\alpha \omega_\beta + B^\alpha (\omega_\mu V^\mu)_{\|\beta} + \left(B^\alpha{}_{;\nu} \omega_\beta + B^\alpha{}_{;\sigma} \pi^\sigma_\beta \omega_\nu - B^\alpha (\omega_{\nu;\sigma} + \omega_\mu B^\mu{}_{;\sigma} \omega_\nu) \pi^\sigma_\beta\right) V^\nu \\ &= (\mathcal{L}_B V)^\alpha \omega_\beta + B^\alpha (\omega_\mu V^\mu)_{\|\beta} + \left(2B^\alpha{}_{;(\nu}\, \omega_{\beta)} - B^\alpha{}_{;\sigma} B^\sigma \omega_\nu \omega_\beta - B^\alpha \pi^\mu_\nu \omega_{\mu;\sigma} \pi^\sigma_\beta\right) V^\nu \\ &= (\mathcal{L}_B V)^\alpha \omega_\beta + B^\alpha (\omega_\mu V^\mu)_{\|\beta} + \Delta^\alpha_{\beta\nu} V^\nu. \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha;\beta} - \varphi_{\alpha\|\beta} &= \varphi_{\alpha;\beta} - \pi^\mu_\alpha(\pi^\nu_\mu\varphi_\nu)_{;\sigma}\pi^\sigma_\beta \\
&= \varphi_{\alpha;\beta} - \pi^\mu_\alpha\pi^\nu_{\mu;\sigma}\pi^\sigma_\beta\varphi_\nu - \pi^\nu_\alpha\varphi_{\nu;\sigma}\pi^\sigma_\beta \\
&= \varphi_{\alpha;\beta} - (\varphi_{\alpha;\sigma} - \varphi_{\nu;\sigma}B^\nu\omega_\alpha)\pi^\sigma_\beta + B^\nu\pi^\mu_\alpha\omega_{\mu;\sigma}\pi^\sigma_\beta\varphi_\nu \\
&= \varphi_{\alpha;\sigma}B^\sigma\omega_\beta + \varphi_{\nu;\sigma}B^\nu\omega_\alpha\pi^\sigma_\beta - B^\nu\chi_{\beta\alpha}\varphi_\nu \\
&= (\mathcal{L}_B\varphi)_\alpha\omega_\beta + \omega_\alpha(\varphi_\nu B^\nu)_{\|\beta} - \left(B^\nu{}_{;\alpha}\omega_\beta + B^\nu{}_{;\sigma}\omega_\alpha\pi^\sigma_\beta + B^\nu\chi_{\beta\alpha}\right)\varphi_\nu \\
&= (\mathcal{L}_B\varphi)_\alpha\omega_\beta + \omega_\alpha(\varphi_\nu B^\nu)_{\|\beta} - \Delta^\nu_{\beta\alpha}\varphi_\nu.
\end{aligned}$$

Und schließlich gilt:

$$\begin{aligned}
& S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta;\epsilon} - S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta\|\epsilon} \\
&= S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta;\epsilon} - \pi^\alpha_\mu\cdots\pi^\beta_\nu\pi^\sigma_\gamma\cdots\pi^\tau_\delta(\pi^\mu_\eta\cdots\pi^\nu_\rho\pi^\kappa_\sigma\cdots\pi^\theta_\tau S^{\eta\ldots\rho}{}_{\kappa\ldots\theta})_{;\zeta}\pi^\zeta_\epsilon \\
&= S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta;\epsilon} - \pi^\alpha_\mu\cdots\pi^\beta_\nu\pi^\sigma_\gamma\cdots\pi^\tau_\delta S^{\mu\ldots\nu}{}_{\sigma\ldots\tau;\zeta}\pi^\zeta_\epsilon \\
&= S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta;\epsilon} - \pi^\alpha_\mu\cdots\pi^\beta_\nu\pi^\sigma_\gamma\cdots\left((\pi^\tau_\delta S^{\mu\ldots\nu}{}_{\sigma\ldots\tau})_{;\zeta} - \pi^\tau_{\delta;\zeta}S^{\mu\ldots\nu}{}_{\sigma\ldots\tau}\right)\pi^\zeta_\epsilon \\
&= S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta;\epsilon} - \pi^\alpha_\mu\cdots\pi^\beta_\nu\pi^\sigma_\gamma\cdots S^{\mu\ldots\nu}{}_{\sigma\ldots\delta;\zeta}\pi^\zeta_\epsilon + S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\tau}\pi^\tau_{\delta;\zeta}\pi^\zeta_\epsilon \\
&\vdots \\
&= S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta;\epsilon} - S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta;\zeta}\pi^\zeta_\epsilon + \Big(\pi^\alpha_{\mu;\zeta}S^{\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} + \ldots + \pi^\beta_{\nu;\zeta}S^{\alpha\ldots\nu}{}_{\gamma\ldots\delta} \\
&\qquad + \pi^\sigma_{\gamma;\zeta}S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\sigma\ldots\delta} + \ldots + \pi^\tau_{\delta;\zeta}S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\tau}\Big)\pi^\zeta_\epsilon \\
&= (\mathcal{L}_BS)^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta}\,\omega_\epsilon + \omega_\epsilon\Big(B^\alpha{}_{;\mu}S^{\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} + \ldots + B^\beta{}_{;\nu}S^{\alpha\ldots\nu}{}_{\gamma\ldots\delta} \\
&\qquad - B^\sigma{}_{;\gamma}S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\sigma\ldots\delta} - \ldots - B^\tau{}_{;\delta}S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\tau}\Big) + \Big(\ldots\ \text{s.o.}\ \ldots\Big)\pi^\zeta_\epsilon \\
&= (\mathcal{L}_BS)^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta}\,\omega_\epsilon + (B^\alpha{}_{;\mu}\,\omega_\epsilon + \pi^\alpha_{\mu;\zeta}\pi^\zeta_\epsilon)S^{\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} + \ldots + (B^\beta{}_{;\nu}\omega_\epsilon + \pi^\beta_{\nu;\zeta}\pi^\zeta_\epsilon)S^{\alpha\ldots\nu}{}_{\gamma\ldots\delta} \\
&\qquad - (B^\sigma{}_{;\gamma}\,\omega_\epsilon - \pi^\sigma_{\gamma;\zeta}\pi^\zeta_\epsilon)S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\sigma\ldots\delta} - \ldots - (B^\tau{}_{;\delta}\,\omega_\epsilon - \pi^\tau_{\delta;\zeta}\pi^\zeta_\epsilon)S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\tau} \\
&= (\mathcal{L}_BS)^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta}\,\omega_\epsilon + (B^\alpha{}_{;\mu}\,\omega_\epsilon - B^\alpha\omega_{\mu;\zeta}\pi^\zeta_\epsilon)S^{\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} + \ldots \\
&\qquad - (B^\sigma{}_{;\gamma}\,\omega_\epsilon + B^\sigma{}_{;\zeta}\omega_\gamma\pi^\zeta_\epsilon)S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\sigma\ldots\delta} - \ldots \\
&= (\mathcal{L}_BS)^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta}\,\omega_\epsilon + (B^\alpha{}_{;\mu}\,\omega_\epsilon + B^\alpha\chi_{\epsilon\mu})S^{\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} + \ldots \\
&\qquad - (B^\sigma{}_{;\gamma}\,\omega_\epsilon + B^\sigma{}_{;\epsilon}\,\omega_\gamma - B^\sigma{}_{;\zeta}B^\zeta\omega_\gamma\omega_\epsilon)S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\sigma\ldots\delta} - \ldots \\
&= (\mathcal{L}_BS)^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta}\,\omega_\epsilon + \Delta^\alpha_{\epsilon\mu}S^{\mu\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta} + \ldots - \Delta^\sigma_{\epsilon\gamma}S^{\alpha\ldots\beta}{}_{\sigma\ldots\delta} - \ldots \ \blacksquare
\end{aligned}$$

$\chi_{(\mu\nu)}$ bezeichne ich auch als die <u>äußere Krümmung</u> von π. Dies beruht auf der folgenden Aussage, nach der $\chi_{(\mu\nu)}$ für bezüglich $\widetilde{\nabla}$ „geodätische“ Kurven im Bildbereich von $\hat{\pi}$ die Abweichung vom „Geodätisch-Sein“ bezüglich ∇ beschreibt.

Folgerung. *Für Vektoren V mit $\langle\omega, V\rangle = 0$ gilt:*

$$\nabla_V V - \widetilde{\nabla}_V V = \chi(V,V)\,B. \tag{33}$$

Beweis: $(V^\alpha{}_{;\mu} - V^\alpha{}_{\Vert\mu})V^\mu = \Delta^\alpha_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = B^\alpha \chi_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$. ■

Im allgemeinen Fall, d. h. wenn die Projektion nicht speziell aus Vektor und Kovektor gebildet ist, wird man wohl besser $\pi^\sigma_\mu \pi^\tau_\nu \pi^\alpha_{(\sigma;\tau)} = B^\alpha \chi_{(\mu\nu)}$ als die äußere Krümmung bezeichnen.

Drehen wir jetzt unseren Standpunkt um: wenn die projizierte Ableitung vorgegeben ist, wann kann man damit eine kovariante Ableitung konstruieren?

Lemma 6. *Gegeben seien B und ω, die daraus gebildete Projektion π, eine Abbildung $\widetilde{\nabla}_X$ auf den Vektorfeldern und ein Tensor $\Delta^\alpha_{\beta\gamma}$. Dann ist*

$$\nabla_X Y := \widetilde{\nabla}_X Y + \langle\omega, X\rangle\,\mathcal{L}_B Y + \langle d\langle\omega, Y\rangle, \hat{\pi}(X)\rangle B + \Delta(X,Y) \tag{34}$$

genau dann eine torsionsfreie kovariante Ableitung mit $\widetilde{\nabla}_X = \hat{\pi}\circ\nabla_{\hat{\pi}(X)}\circ\hat{\pi}$, wenn gilt:

$$\begin{gathered}
\widetilde{\nabla}_{fX+gY}V = f\widetilde{\nabla}_X V + g\widetilde{\nabla}_Y V, \qquad \widetilde{\nabla}_X(V+W) = \widetilde{\nabla}_X V + \widetilde{\nabla}_X W\\
\widetilde{\nabla}_X(fV) = f\widetilde{\nabla}_X V + \langle df, \hat{\pi}(X)\rangle\hat{\pi}(V),\\
\widetilde{\nabla}_X = \hat{\pi}\circ\widetilde{\nabla}_{\hat{\pi}(X)}\circ\hat{\pi}, \qquad \widetilde{T}(X,Y) = 0,\\
\hat{\pi}(\Delta) = 0, \qquad \Delta(X,Y) - \Delta(Y,X) = D(X,Y).
\end{gathered} \tag{35}$$

Es folgt dann:

$$B^\alpha{}_{;\beta} = \Delta^\alpha_{\beta\mu}B^\mu, \qquad \omega_{\mu;\nu} = 2\omega_{[\mu,\sigma]}B^\sigma\omega_\nu - \Delta^\sigma_{\nu\mu}\omega_\sigma, \tag{36}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \Delta^\alpha_{\beta\gamma} - B^\alpha{}_{,\gamma}\omega_\beta + B^\alpha\pi^\mu_\beta\omega_{\gamma,\mu}\,, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \widetilde{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &+ \Delta^\alpha_{\delta\beta;\gamma} - \Delta^\alpha_{\gamma\beta;\delta} + \Delta^\alpha_{\delta\mu}\Delta^\mu_{\gamma\beta} - \Delta^\alpha_{\gamma\mu}\Delta^\mu_{\delta\beta}\\
&+ 2\omega_\mu D^\mu_{\gamma\delta}\omega_{[\beta,\nu]}B^\nu B^\alpha + 2\omega_{[\gamma}(Q^\alpha_{\delta]\beta} + B^\alpha q_{\delta]\beta}),
\end{aligned} \tag{38}$$

wobei $Q^\alpha_{\beta\gamma}$ und $q_{\mu\nu}$ definiert sind als:

$$Q(\sigma, X, Y) := \langle\sigma, \widehat{Q}(X,Y)\rangle$$

$$\widehat{Q}(Y,Z) := \hat{\pi}\big(\mathcal{L}_B(\widetilde{\nabla}_Y Z)\big) - \widetilde{\nabla}_Y(\mathcal{L}_B Z) - \widetilde{\nabla}_{\mathcal{L}_B Y}Z + \langle\mathcal{L}_B\omega, Y\rangle\hat{\pi}(\mathcal{L}_B Z), \tag{39}$$

$$q_{\mu\nu} := 2\big((\omega_{[\nu,\sigma]}B^\sigma)_{\Vert\mu} - 2\omega_{[\mu,\sigma]}\omega_{[\nu,\tau]}B^\sigma B^\tau\big). \tag{40}$$

Q ist ein Tensor und hat die Eigenschaften:

$$\hat{\pi}(Q) = Q, \qquad \widehat{Q}(Y,Z) = \widehat{Q}(Z,Y). \tag{41}$$

Ferner gilt z.B. für jeden zweimal differenzierbaren Tensor $S \in T^0_2 M$ mit $\hat{\pi}(S) = S$:

$$\begin{aligned}\Big(\widetilde{\nabla}_X(\mathcal{L}_B S) - \mathcal{L}_B(\widetilde{\nabla}_X S) + \widetilde{\nabla}_{\mathcal{L}_B X} S - \langle \mathcal{L}_B \omega, X\rangle \mathcal{L}_B S\Big)(Y,Z)& \\ = S(Y, \widehat{Q}(X,Z)) + S(\widehat{Q}(X,Y),Z)&\end{aligned} \tag{42}$$

Beweis: ∇ ist genau dann eine kovariante Ableitung, wenn gilt:

$$\begin{aligned}\nabla_{fX+gY} V &= f\nabla_X V + g\nabla_Y V,\\ \nabla_X(V+W) &= \nabla_X V + \nabla_X W,\\ \nabla_X(fV) &= f\nabla_X V + \langle df, X\rangle V.\end{aligned}$$

Setzt man die Definition von ∇ in diese Gleichungen ein, so erhält man gerade die ersten drei behaupteten Eigenschaften von $\widetilde{\nabla}$, z.B.:

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_X(fV) - f\nabla_X V - \langle df, X\rangle V\\ &= \widetilde{\nabla}_X(fV) + \langle \omega, X\rangle \mathcal{L}_B(fV) + \langle d\langle \omega, fV\rangle, \hat{\pi}(X)\rangle B + \Delta(X, fV)\\ &\quad - f\big(\widetilde{\nabla}_X V + \langle \omega, X\rangle \mathcal{L}_B V + \langle d\langle \omega, V\rangle, \hat{\pi}(X)\rangle B + \Delta(X,V)\big) - \langle df, X\rangle V\\ &= \widetilde{\nabla}_X(fV) - f\widetilde{\nabla}_X V - \langle df, \hat{\pi}(X)\rangle V + \langle \omega, V\rangle\langle df, \hat{\pi}(X)\rangle B\\ &= \widetilde{\nabla}_X(fV) - f\widetilde{\nabla}_X V - \langle df, \hat{\pi}(X)\rangle \hat{\pi}(V).\end{aligned}$$

Für die Torsion findet man mit

$$\begin{aligned}[X,Y] = [\hat{\pi}(X), \hat{\pi}(Y)] &+ \langle \omega, X\rangle \mathcal{L}_B Y - \langle \omega, Y\rangle \mathcal{L}_B X\\ &+ \big(\langle d\langle \omega, Y\rangle, \hat{\pi}(X)\rangle - \langle d\langle \omega, X\rangle, \hat{\pi}(Y)\rangle\big)B,\end{aligned} \tag{43}$$

daß gilt:

$$\begin{aligned}0 = T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\\ &= \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X - [\hat{\pi}(X), \hat{\pi}(Y)] + \Delta(X,Y) - \Delta(Y,X)\\ &= \widetilde{T}(X,Y) - D(X,Y) + \Delta(X,Y) - \Delta(Y,X).\end{aligned} \tag{44}$$

Aus der letzten Forderung, $\widetilde{\nabla}_X = \hat{\pi} \circ \nabla_{\hat{\pi}(X)} \circ \hat{\pi}$, erhält man zunächst:

$$\hat{\pi} \circ \widetilde{\nabla}_{\hat{\pi}(X)} \circ \hat{\pi} = \widetilde{\nabla}_X,$$

und damit dann durch Einsetzen in (34)

$$\hat{\pi}(\Delta) = 0.$$

Projiziert man die Gleichung (44) nun über alle Argumente, so bekommt man $\widetilde{T}(X,Y) = 0$, und setzt man dies wieder ein, so bleibt $\Delta(X,Y) - \Delta(Y,X) = D(X,Y)$ nach.

${B^\alpha}_{;\beta}$ kann man aus (34) ablesen, für $\omega_{\mu;\nu}$ verwendet man (31) und

$$(\mathcal{L}_B\omega)_\mu = \omega_{\mu,\nu}B^\nu + {B^\nu}_{,\mu}\omega_\nu = 2\omega_{[\mu,\nu]}B^\nu. \tag{45}$$

Die Zusammenhangskomponenten sind direkt auszurechnen:

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= \langle dx^\alpha, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}}\tfrac{\partial}{\partial x^\gamma}\rangle \\
&= \langle dx^\alpha, \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}}\tfrac{\partial}{\partial x^\gamma} + \omega_\beta \mathcal{L}_B \tfrac{\partial}{\partial x^\gamma} + \langle d\omega_\gamma, \hat{\pi}(\tfrac{\partial}{\partial x^\beta})\rangle B + \Delta(\tfrac{\partial}{\partial x^\beta}, \tfrac{\partial}{\partial x^\gamma})\rangle \\
&= \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} - \omega_\beta {B^\alpha}_{,\gamma} + \omega_{\gamma,\mu}\pi^\mu_\beta B^\alpha + \Delta^\alpha_{\beta\gamma}.
\end{aligned}$$

Eine etwas suggestivere Form läßt sich mit $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} := \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} - \pi^\alpha_\mu \pi^\mu_{\gamma,\nu}\pi^\nu_\beta$ herleiten:

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} - \pi^\alpha_\mu {B^\mu}_{,\nu}\pi^\nu_\beta\omega_\gamma - {B^\alpha}_{,\gamma}\omega_\beta + B^\alpha\pi^\mu_\beta(\pi^\nu_\gamma + B^\nu\omega_\gamma)\omega_{\nu,\mu} + \Delta^\alpha_{\beta\gamma} \\
&= \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} - ({B^\alpha}_{,\gamma}\omega_\beta + {B^\alpha}_{,\nu}\pi^\nu_\beta\omega_\gamma) + B^\alpha\pi^\mu_\gamma\pi^\nu_\beta\omega_{\mu,\nu} + \Delta^\alpha_{\beta\gamma} \\
&= \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \Delta^\alpha_{(\beta\gamma)} - (2{B^\alpha}_{,(\beta}\,\omega_{\gamma)} - {B^\alpha}_{,\mu}B^\mu\,\omega_\beta\omega_\gamma - B^\alpha\pi^\mu_\beta\pi^\nu_\gamma\omega_{(\mu,\nu)}),
\end{aligned} \tag{46}$$

wobei ich $\Delta^\alpha_{[\beta\gamma]} = \frac{1}{2}D^\alpha_{\beta\gamma} = B^\alpha\pi^\mu_\beta\pi^\nu_\gamma\omega_{[\mu,\nu]}$ benutzt habe.

Nun aber zum eigentlichen Leckerbissen dieses Lemmas, der Darstellung des Riemann-Tensors. Es sei (wie üblich sei $\widetilde{X}$ gleich $\hat{\pi}(X)$, usw.):

$$\begin{aligned}
A(X,Y,Z) :=& \nabla_X(\nabla_Y Z) - \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) - (\nabla_X\Delta)(Y,Z) - \Delta(Y,\Delta(X,Z)) \\
=& \nabla_X\big(\widetilde{\nabla}_Y Z + \langle\omega,Y\rangle\mathcal{L}_B Z + \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega,Z\rangle\cdot B + \Delta(Y,Z)\big) \\
&\quad - \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) - (\nabla_X\Delta)(Y,Z) - \Delta(Y,\Delta(X,Z)) \\
=& \langle\omega,X\rangle\mathcal{L}_B(\widetilde{\nabla}_Y Z) + \Delta(X,\widetilde{\nabla}_Y Z) + \mathcal{L}_X\langle\omega,Y\rangle\cdot\mathcal{L}_B Z \\
&\quad + \langle\omega,Y\rangle\big(\widetilde{\nabla}_X(\mathcal{L}_B Z) + \langle\omega,X\rangle\mathcal{L}_B^2 Z + \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\langle\omega,\mathcal{L}_B Z\rangle\cdot B + \Delta(X,\mathcal{L}_B Z)\big) \\
&\quad + \mathcal{L}_X\mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega,Z\rangle\cdot B + \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega,Z\rangle\Delta(X,B) \\
&\quad + \Delta(\widetilde{\nabla}_X Y + \langle\omega,X\rangle\mathcal{L}_B Y + \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\langle\omega,Y\rangle\cdot B + \Delta(X,Y), Z) \\
&\quad + \Delta(Y, \widetilde{\nabla}_X Z + \langle\omega,X\rangle\mathcal{L}_B Z + \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\langle\omega,Z\rangle\cdot B) \\
=& \Delta(\widetilde{\nabla}_X Y + \langle\omega,X\rangle\mathcal{L}_B Y + \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\langle\omega,Y\rangle\cdot B + \Delta(X,Y), Z) \\
&\quad + \Delta(X, \widetilde{\nabla}_Y Z + \langle\omega,Y\rangle\mathcal{L}_B Z + \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega,Z\rangle\cdot B) \\
&\quad + \Delta(Y, \widetilde{\nabla}_X Z + \langle\omega,X\rangle\mathcal{L}_B Z + \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\langle\omega,Z\rangle\cdot B) + \langle\omega,X\rangle\langle\omega,Y\rangle\mathcal{L}_B^2 Z \\
&\quad + \langle\omega,X\rangle\mathcal{L}_B(\widetilde{\nabla}_Y Z) + \langle\omega,Y\rangle\big(\widetilde{\nabla}_X(\mathcal{L}_B Z) + \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\langle\omega,\mathcal{L}_B Z\rangle\cdot B\big) \\
&\quad + \mathcal{L}_X\langle\omega,Y\rangle\cdot\mathcal{L}_B Z + \mathcal{L}_X\mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega,Z\rangle\cdot B.
\end{aligned}$$

Die Zeilen 2–3 dieses Ausdrucks sind symmetrisch in (X, Y) und werden sich gleich hinwegheben. Ferner wird noch benötigt werden:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{[X,Y]}Z - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}Z \\
&= \widetilde{\nabla}_{[X,Y]-[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}Z + \langle\omega, [X,Y]\rangle \mathcal{L}_B Z + \mathcal{L}_{\hat{\pi}([X,Y])}\langle\omega, Z\rangle \cdot B + \Delta([X,Y], Z) \\
&\underset{(43)}{=} \langle\omega, X\rangle \widetilde{\nabla}_{\mathcal{L}_B Y} Z - \langle\omega, Y\rangle \widetilde{\nabla}_{\mathcal{L}_B X} Z \\
&\quad + \big(\langle\omega, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]\rangle + \langle\omega, X\rangle\langle\omega, \mathcal{L}_B Y\rangle - \langle\omega, Y\rangle\langle\omega, \mathcal{L}_B X\rangle + \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\langle\omega, Y\rangle - \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega, X\rangle\big)\mathcal{L}_B Z \\
&\quad + \mathcal{L}_{\hat{\pi}([X,Y])}\langle\omega, Z\rangle \cdot B + \Delta([X,Y], Z),
\end{aligned}
$$

sowie:

$$
\hat{\pi}([D(X,Y), \widetilde{Z}]) = -\hat{\pi}\big(\mathcal{L}_{\widetilde{Z}}(\langle\omega, D(X,Y)\rangle B)\big) = \langle\omega, D(X,Y)\rangle\, \hat{\pi}(\mathcal{L}_B Z),
$$

da $\hat{\pi}(\mathcal{L}_B \widetilde{Z}) = \hat{\pi}(\mathcal{L}_B Z)$ gilt. Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&P(X,Y,Z) \\
&:= R(X,Y)Z - \widetilde{R}(X,Y)Z \\
&\quad - \big((\nabla_X \Delta)(Y,Z) - (\nabla_Y \Delta)(X,Z) + \Delta(Y, \Delta(X,Z)) - \Delta(X, \Delta(Y,Z))\big) \\
&= A(X,Y,Z) - A(Y,X,Z) - \nabla_{[X,Y]}Z + \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}Z + \hat{\pi}([D(X,Y), \widetilde{Z}]) \\
&= \langle\omega, X\rangle\big(\mathcal{L}_B(\widetilde{\nabla}_Y Z) - \widetilde{\nabla}_Y(\mathcal{L}_B Z) - \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega, \mathcal{L}_B Z\rangle \cdot B - \widetilde{\nabla}_{\mathcal{L}_B Y} Z - \langle\omega, \mathcal{L}_B Y\rangle \mathcal{L}_B Z\big) \\
&\quad + \big(\mathcal{L}_X\langle\omega, Y\rangle - \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\langle\omega, Y\rangle\big)\mathcal{L}_B Z + \mathcal{L}_X \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega, Z\rangle \cdot B \\
&\quad - \text{ dasselbe mit } X \text{ und } Y \text{ vertauscht} \\
&\quad + \Delta(\widetilde{T}(X,Y) + \hat{\pi}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) + \langle\omega, X\rangle \mathcal{L}_B Y - \langle\omega, Y\rangle \mathcal{L}_B X + (\mathcal{L}_{\widetilde{X}}\langle\omega, Y\rangle - \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega, X\rangle)B \\
&\qquad + \Delta(X,Y) - \Delta(Y,X) - [X,Y], Z) \\
&\quad - \langle\omega, D(X,Y)\rangle \mathcal{L}_B Z - \mathcal{L}_{\hat{\pi}([X,Y])}\langle\omega, Z\rangle \cdot B + \langle\omega, D(X,Y)\rangle\, \hat{\pi}(\mathcal{L}_B Z).
\end{aligned}
$$

Der Δ-Term entfällt wegen $\widetilde{T}(X,Y) = 0$, $\Delta(X,Y) - \Delta(Y,X) = D(X,Y)$ und (43). Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
&P(X,Y,Z) \\
&= \langle\omega, X\rangle\big(\mathcal{L}_B(\widetilde{\nabla}_Y Z) - \widetilde{\nabla}_Y(\mathcal{L}_B Z) - \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega, \mathcal{L}_B Z\rangle \cdot B - \widetilde{\nabla}_{\mathcal{L}_B Y} Z \\
&\qquad - \langle\omega, \mathcal{L}_B Y\rangle \mathcal{L}_B Z + \mathcal{L}_B\langle\omega, Y\rangle \cdot \mathcal{L}_B Z\big) \\
&\quad + \big(\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y\langle\omega, Z\rangle - \mathcal{L}_X\langle\omega, Y\rangle \mathcal{L}_B\langle\omega, Z\rangle - \langle\omega, Y\rangle \mathcal{L}_X \mathcal{L}_B\langle\omega, Z\rangle\big)B \\
&\quad - \text{ dasselbe mit } X \text{ und } Y \text{ vertauscht} \\
&\quad - \big(\langle\omega, D(X,Y)\rangle\langle\omega, \mathcal{L}_B Z\rangle + \mathcal{L}_{[X,Y]}\langle\omega, Z\rangle - \langle\omega, [X,Y]\rangle\, \mathcal{L}_B\langle\omega, Z\rangle\big)B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle\omega, X\rangle\big(\mathcal{L}_B(\widetilde{\nabla}_Y Z) - \widetilde{\nabla}_Y(\mathcal{L}_B Z) - \widetilde{\nabla}_{\mathcal{L}_B Y} Z + \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\mathcal{L}_B\omega, Z\rangle \cdot B \\
&\qquad + \langle\mathcal{L}_B\omega, Y\rangle\mathcal{L}_B Z + (-\mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\mathcal{L}_B\langle\omega, Z\rangle + \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_B\langle\omega, Z\rangle)B\big) \\
&\quad - \mathcal{L}_X\langle\omega, Y\rangle\, \mathcal{L}_B\langle\omega, Z\rangle\, B \\
&\quad - \text{ dasselbe mit } X \text{ und } Y \text{ vertauscht} \\
&\quad + \langle\omega, D(X,Y)\rangle\, \langle\mathcal{L}_B\omega, Z\rangle\, B \\
&\quad - \mathcal{L}_B\langle\omega, Z\rangle\big(\langle\omega, D(X,Y)\rangle - \langle\omega, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] + \langle\omega, X\rangle\mathcal{L}_B Y - \langle\omega, Y\rangle\mathcal{L}_B X\rangle \\
&\qquad - \mathcal{L}_{\widetilde{X}}\langle\omega, Y\rangle + \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\omega, X\rangle\big)B \\
&= \langle\omega, X\rangle\, A(Y,Z) - \langle\omega, Y\rangle\, A(X,Z) + \langle\omega, D(X,Y)\rangle\, \langle\mathcal{L}_B\omega, Z\rangle\, B,
\end{aligned} \tag{47}
$$

wobei:

$$
\begin{aligned}
&A(Y,Z) \\
:= {}&\mathcal{L}_B(\widetilde{\nabla}_Y Z) - \widetilde{\nabla}_Y(\mathcal{L}_B Z) - \widetilde{\nabla}_{\mathcal{L}_B Y} Z + \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\mathcal{L}_B\omega, Z\rangle \cdot B \\
&\quad + \langle\mathcal{L}_B\omega, Y\rangle\mathcal{L}_B Z + \mathcal{L}_B\langle\omega, Z\rangle\, (\langle\omega, \mathcal{L}_B Y\rangle - \mathcal{L}_B\langle\omega, Y\rangle)B \\
= {}&\widehat{Q}(Y,Z) \\
&\quad + \big(\langle\omega, \mathcal{L}_B(\widetilde{\nabla}_Y Z)\rangle + \mathcal{L}_{\widetilde{Y}}\langle\mathcal{L}_B\omega, Z\rangle + \langle\mathcal{L}_B\omega, Y\rangle\langle\omega, \mathcal{L}_B Z\rangle - \mathcal{L}_B\langle\omega, Z\rangle \cdot \langle\mathcal{L}_B\omega, Y\rangle\big)B \\
= {}&\widehat{Q}(Y,Z) + \big(- \langle\mathcal{L}_B\omega, \widetilde{\nabla}_Y Z\rangle + \widetilde{\nabla}_Y\langle\mathcal{L}_B\omega, Z\rangle - \langle\mathcal{L}_B\omega, Z\rangle\langle\mathcal{L}_B\omega, Y\rangle\big)B \\
= {}&\widehat{Q}(Y,Z) + \big(\langle\widetilde{\nabla}_Y(\mathcal{L}_B\omega), Z\rangle - \langle\mathcal{L}_B\omega, Y\rangle\langle\mathcal{L}_B\omega, Z\rangle\big)B \\
= {}&\widehat{Q}(Y,Z) + q(Y,Z).
\end{aligned}
$$

Beachtet man noch (45), so hat man (38) bewiesen.

Aus (39) entnimmt man direkt und mit Hilfe von $\langle\mathcal{L}_B\omega, B\rangle = 0$, $\hat{\pi}(\mathcal{L}_B V) = \hat{\pi}\big(\mathcal{L}_B(\hat{\pi}(V))\big)$:

$$
\hat{\pi}(\widehat{Q}(Y,Z)) = \widehat{Q}(Y,Z), \qquad \widehat{Q}(\hat{\pi}(Y), Z) = \widehat{Q}(Y,Z) = \widehat{Q}(Y, \hat{\pi}(Z)).
$$

Mißtrauische Naturen können sich direkt mit (39) davon überzeugen, daß $\widehat{Q}$ in der Tat bilinear ist, doch kann ich mir es hier ersparen, weil es mit $\widehat{Q}(Y,Z) = \widehat{Q}(\widetilde{Y}, \widetilde{Z})$ bereits aus der Darstellung (47) folgt, weil P ein Tensor ist. Die Symmetrie folgt aus dem Verschwinden der „Torsion“ mit (25):

$$
\begin{aligned}
&\widehat{Q}(Y,Z) - \widehat{Q}(Z,Y) \\
&= \hat{\pi}\big(\mathcal{L}_B(\hat{\pi}([\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]))\big) - \hat{\pi}([\widetilde{Y}, \hat{\pi}(\mathcal{L}_B Z)]) - \hat{\pi}([\hat{\pi}(\mathcal{L}_B Y), \widetilde{Z}]) \\
&\qquad + \langle\mathcal{L}_B\omega, Y\rangle\hat{\pi}(\mathcal{L}_B Z) - \langle\mathcal{L}_B\omega, Z\rangle\hat{\pi}(\mathcal{L}_B Y) \\
&= \hat{\pi}\Big([B, [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]] - [\widetilde{Y}, \mathcal{L}_B\widetilde{Z} - \langle\omega, \mathcal{L}_B\widetilde{Z}\rangle B] - [\mathcal{L}_B\widetilde{Y} - \langle\omega, \mathcal{L}_B\widetilde{Y}\rangle B, \widetilde{Z}] \\
&\qquad + \langle\mathcal{L}_B\omega, Y\rangle\mathcal{L}_B Z - \langle\mathcal{L}_B\omega, Z\rangle\mathcal{L}_B Y\Big) \\
&= \hat{\pi}\big([B, [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]] + [\widetilde{Y}, [\widetilde{Z}, B]] + [\widetilde{Z}, [B, \widetilde{Y}]]\big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

nach der Jacobi-Identität. Die letzte Gleichung des Lemmas, (42), erhält man schließlich durch fleißiges „rückwärtiges“ Benutzen der Produktregeln für $\mathcal{L}_B$ und $\widetilde{\nabla}$ und mit der Beziehung

$$\mathcal{L}_B(\widetilde{\nabla}_X f) - \widetilde{\nabla}_X(\mathcal{L}_B f) - \widetilde{\nabla}_{\mathcal{L}_B X} f + \langle \mathcal{L}_B \omega, X\rangle \mathcal{L}_B f = 0, \tag{48}$$

die für beliebige zweimal differenzierbare Skalare f gilt. ■

Aber nun (endlich) zur Anwendung.

Satz 3. *Sei $k \in \overline{\mathbb{N}}$, $k \geq 2$. Die Axiome 1–3 sollen gelten mit C^k-Metriken $g_{\mu\nu}$, $h^{\alpha\beta}$ und einem C^{k-1}-Zusammenhang $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Gegeben sei ferner ein zeitartiges normiertes C^k-Vektorfeld B auf M.*
Dann sei $\omega_\mu := B^\bullet_\mu$, $\pi^\alpha_\beta := \delta^\alpha_\beta - B^\alpha\omega_\beta$, und $\gamma_{\mu\nu}$ und $k^{\alpha\beta}$ seien definiert wie im Lemma 2 und danach. Zur Abkürzung schreibe ich $\dot\gamma_{\mu\nu} := (\mathcal{L}_B\gamma)_{\mu\nu}$.
Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:
(a) Die Zusammenhangsaxiome (Axiom 4) sind erfüllt.
(b) Es gibt einen antisymmetrischen C^{k-1}-Tensor $F_{\mu\nu}$, so daß gilt:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \Delta^\alpha_{(\beta\gamma)} - \left(2B^\alpha{}_{,(\beta}\,\omega_{\gamma)} - B^\alpha{}_{,\mu}B^\mu\,\omega_\beta\omega_\gamma - B^\alpha\pi^\mu_\beta\pi^\nu_\gamma\omega_{(\mu,\nu)}\right), \tag{46}$$

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}k^{\alpha\rho}\pi^\sigma_\beta\pi^\tau_\gamma(\gamma_{\rho\sigma,\tau} + \gamma_{\tau\rho,\sigma} - \gamma_{\sigma\tau,\rho}), \tag{49}$$

$$\Delta^\alpha_{(\beta\gamma)} = \tfrac{1}{2}h^{\alpha\sigma}\left(\dot\gamma_{\sigma\beta}\,\omega_\gamma + \dot\gamma_{\gamma\sigma}\,\omega_\beta - \dot\gamma_{\beta\gamma}\,\omega_\sigma\right) + 2k^{\alpha\sigma}F_{\sigma(\beta}\,\omega_{\gamma)}\,, \tag{50}$$

$$\lambda F_{\mu\nu} = \omega_{[\nu,\mu]}, \qquad F_{[\mu\nu,\sigma]} = 0. \tag{51}$$

Für $Q^\alpha_{\beta\gamma}$ ergibt sich dann:

$$Q^\alpha_{\mu\nu} = k^{\alpha\sigma}\left(\tfrac{1}{2}(\dot\gamma_{\sigma\mu\|\nu} + \dot\gamma_{\nu\sigma\|\mu} - \dot\gamma_{\mu\nu\|\sigma}) + (\omega_{[\sigma,\tau]}\dot\gamma_{\mu\nu} - \omega_{[\mu,\tau]}\dot\gamma_{\nu\sigma} - \omega_{[\nu,\tau]}\dot\gamma_{\sigma\mu})B^\tau\right). \tag{52}$$

Während bei $\lambda \neq 0$ der Zusammenhang also vollständig durch die Metriken fixiert ist, hat man bei $\lambda = 0$ lokal eine 1-Form frei (Verallgemeinerung des Newtonschen Potentials). Dafür verliert man aber Freiheit in den Metriken, denn es muß $d\omega = 0$ gelten. Wenn das gilt, dann kann man zu jedem vorgegebenen B einen ausgezeichneten Zusammenhang definieren durch die Forderung $F = 0$.

Beweis: Ich will zunächst nur das erste Zusammenhangsaxiom betrachten. Sei also ein torsionsfreier Zusammenhang ∇ gegeben, für den gilt

$$g_{\mu\nu;\sigma} = 0, \qquad h^{\alpha\beta}{}_{;\sigma} = 0.$$

∇ wird zerlegt in $\widetilde{\nabla}$ und $\Delta^\alpha_{\beta\gamma}$, und ich will im ersten Schritt zeigen, daß $\widetilde{\nabla}$ vollständig durch die dreidimensionalen Metriken festgelegt ist.

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mu\nu}h^{\nu\sigma} = \pi^\sigma_\mu \;&\Longrightarrow\; \gamma_{\mu\nu;\tau}h^{\nu\sigma} = \pi^\sigma_{\mu;\tau}\\
&\Longrightarrow\; \gamma_{\mu\nu;\tau}\pi^\nu_\eta = \gamma_{\eta\sigma}\pi^\sigma_{\mu;\tau}\\
&\Longrightarrow\; \gamma_{\mu\eta\|\tau} = \gamma_{\eta\sigma}\pi^\sigma_{\mu\|\tau} = 0.
\end{aligned} \tag{53}$$

Dabei wurde in der letzten Zeile Lemma 4(b) benutzt. Ich schreibe:

$$\begin{aligned}0 = \gamma_{\mu\nu\|\eta} &= \pi^\sigma_\mu \pi^\tau_\nu \gamma_{\sigma\tau;\rho}\pi^\rho_\eta = \\ &= \pi^\sigma_\mu \pi^\tau_\nu (\gamma_{\sigma\tau,\rho} - \Gamma^\kappa_{\rho\sigma}\gamma_{\kappa\tau} - \Gamma^\kappa_{\rho\tau}\gamma_{\sigma\kappa})\pi^\rho_\eta \\ &= \pi^\sigma_\mu \pi^\tau_\nu \gamma_{\sigma\tau,\rho}\pi^\rho_\eta - \overline{\Gamma}^\kappa_{\eta\mu}\gamma_{\kappa\nu} - \overline{\Gamma}^\kappa_{\eta\nu}\gamma_{\mu\kappa},\end{aligned}$$

wobei $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \pi^\alpha_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\pi^\mu_\beta \pi^\nu_\gamma$ ist. Durch zyklische Permutation der Indizes erhält man zwei weitere Gleichungen, und aus diesen dreien extrahiert man mit Hilfe von $\overline{\Gamma}^\alpha_{[\beta\gamma]} = 0$ auf die bekannte Weise durch Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned}0 &= \pi^\sigma_\mu \pi^\tau_\nu \pi^\rho_\eta (\gamma_{\rho\sigma,\tau} + \gamma_{\tau\rho,\sigma} - \gamma_{\sigma\tau,\rho}) - 2\overline{\Gamma}^\kappa_{\mu\nu}\gamma_{\kappa\eta} \\ \iff \overline{\Gamma}^\eta_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}k^{\eta\rho}\pi^\sigma_\mu \pi^\tau_\nu (\gamma_{\rho\sigma,\tau} + \gamma_{\tau\rho,\sigma} - \gamma_{\sigma\tau,\rho}).\end{aligned}$$

Damit ist $\widetilde{\nabla}$ festgelegt, und wir müssen uns nur noch um $\Delta^\alpha_{\beta\gamma}$ kümmern.

$\Delta^\alpha_{\beta\gamma}$ soll bestimmt werden aus:

$$\Delta^\alpha_{[\beta\gamma]} = \tfrac{1}{2}D^\alpha_{\beta\gamma} = B^\alpha \chi_{[\beta\gamma]}, \qquad \hat{\pi}(\Delta) = 0, \qquad \gamma_{\mu\nu\|\sigma} = 0, \qquad g_{\mu\nu;\sigma} = 0, \qquad h^{\alpha\beta}{}_{;\sigma} = 0.$$

Betrachte man zunächst nur die Zeitmetrik. Wie man mit etwas Mühe beweisen kann ("The method employed I would gladly explain ..."), gilt allgemein für einen Tensor $S_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu;\sigma} = S_{\mu\nu\|\sigma} &+ (\mathcal{L}_B S)_{\mu\nu}\omega_\sigma + \omega_\mu (B^\eta S_{\eta\nu})_{\|\sigma} + \omega_\nu (S_{\mu\eta}B^\eta)_{\|\sigma} + \omega_\mu\omega_\nu (S_{\eta\theta}B^\eta B^\theta)_{\|\sigma} \\ &- \Delta^\eta_{\sigma\mu}S_{\eta\nu} - \Delta^\eta_{\sigma\nu}S_{\mu\eta}.\end{aligned} \tag{54}$$

Speziell für $g_{\mu\nu}$ folgt daraus mit $g_{\mu\nu} = \omega_\mu\omega_\nu - \lambda\gamma_{\mu\nu}$ und $\gamma_{\mu\nu\|\sigma} = 0$:

$$0 = g_{\mu\nu;\sigma} = (\mathcal{L}_B g)_{\mu\nu}\omega_\sigma - \Delta^\eta_{\sigma\mu}g_{\eta\nu} - \Delta^\eta_{\sigma\nu}g_{\mu\eta}.$$

(Diese Gleichung kann man aber auch anders erhalten als über (54), nämlich durch Zerlegen von $g_{\mu\nu}$ und Anwenden von (32).) Genau wie bei der Bestimmung von $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ kann man dieses äquivalent umformen zu:

$$g_{\sigma\tau}\Delta^\tau_{(\mu\nu)} = \tfrac{1}{2}\big((\mathcal{L}_B g)_{\sigma\mu}\omega_\nu + (\mathcal{L}_B g)_{\nu\sigma}\omega_\mu - (\mathcal{L}_B g)_{\mu\nu}\omega_\sigma + 2\omega_\mu\chi_{[\sigma\nu]} + 2\omega_\nu\chi_{[\sigma\mu]}\big).$$

Ich zerlege die Gleichung bezüglich des Index σ in Anteile parallel und orthogonal zu B. Zunächst parallel:

$$\omega_\tau\Delta^\tau_{(\mu\nu)} = (\mathcal{L}_B\omega)_{(\mu}\omega_{\nu)} - \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_B g)_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\lambda(\mathcal{L}_B\gamma)_{\mu\nu}. \tag{55}$$

Mit $\chi_{\mu\nu} = B^\bullet_\tau\Delta^\tau_{\mu\nu}$ (das folgt aus $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$) kann man dies in die folgende besser bekannte Form bringen:

$$\chi_{(\mu\nu)} = \tfrac{1}{2}\lambda(\mathcal{L}_B\gamma)_{\mu\nu}. \tag{56}$$

Damit ist der $\chi_{\mu\nu}$-Anteil von $\Delta^\alpha_{\beta\gamma}$ vollständig festgelegt. Orthogonal zu B erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}
-\lambda\gamma_{\sigma\tau}\Delta^\tau_{(\mu\nu)} &= \tfrac{1}{2}\big(\pi^\eta_\sigma(\mathcal{L}_B g)_{\eta\mu}\omega_\nu + \pi^\eta_\sigma(\mathcal{L}_B g)_{\nu\sigma}\omega_\mu\big) + \omega_\mu\chi_{[\sigma\nu]} + \omega_\nu\chi_{[\sigma\mu]} \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\big(\mathcal{L}_B(-\lambda\gamma)_{\sigma\mu} + B^\eta(\mathcal{L}_B\omega)_\sigma g_{\eta\mu}\big)\omega_\nu + \big(-\lambda(\mathcal{L}_B\gamma)_{\nu\sigma} + (\mathcal{L}_B\omega)_\sigma\omega_\nu\big)\omega_\mu\Big) \\
&\quad + \omega_\mu\pi^\eta_\sigma(\omega_{[\eta,\nu]} - \omega_{[\eta,\tau]}B^\tau\omega_\nu) + \omega_\nu\pi^\eta_\sigma(\omega_{[\eta,\mu]} - \omega_{[\eta,\tau]}B^\tau\omega_\mu) \\
\iff \lambda\widetilde{\Delta}^\alpha_{\mu\nu} &= k^{\alpha\sigma}\big(\lambda\dot{\gamma}_{\sigma(\mu}\omega_{\nu)} - \omega_\mu\omega_{[\sigma,\nu]} - \omega_\nu\omega_{[\sigma,\mu]}\big).
\end{aligned} \tag{57}$$

Dabei soll natürlich

$$\widetilde{\Delta}^\alpha_{\beta\gamma} := \pi^\alpha_\sigma\Delta^\sigma_{\beta\gamma} = \pi^\alpha_\sigma\Delta^\sigma_{(\beta\gamma)} \tag{58}$$

sein. Aus der Gleichung (57) kann man schon manches erahnen, es sei aber hier nur bemerkt, daß sie bei $\lambda = 0$ zur weiteren Festlegung von $\Delta^\alpha_{\beta\gamma}$ ungeeignet ist. Daher muß man sich im nächsten Schritt erst einmal mit der Raummetrik auseinandersetzen.

Die folgende allgemeine Formel sollte jetzt keine Überraschung mehr sein:

$$\begin{aligned}
S^{\alpha\beta}{}_{;\sigma} = S^{\alpha\beta}{}_{\|\sigma} &+ (\mathcal{L}_B S)^{\alpha\beta}\omega_\sigma + B^\alpha(\omega_\mu S^{\mu\beta})_{\|\sigma} + B^\beta(S^{\alpha\nu}\omega_\nu)_{\|\sigma} \\
&+ B^\alpha B^\beta(S^{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu)_{\|\sigma} + \Delta^\alpha_{\sigma\mu}S^{\mu\beta} + \Delta^\beta_{\sigma\nu}S^{\alpha\nu}.
\end{aligned} \tag{59}$$

Wegen

$$\gamma_{\mu\nu}k^{\nu\sigma} = \pi^\sigma_\mu \implies \gamma_{\mu\nu\|\tau}k^{\nu\sigma} + \gamma_{\mu\nu}k^{\sigma\nu}{}_{\|\tau} = \pi^\sigma_{\mu\|\tau} \iff k^{\sigma\nu}{}_{\|\tau} = 0 \tag{60}$$

erhält man damit aus dem Verschwinden der kovarianten Ableitung von $h^{\alpha\beta}$:

$$0 = (\mathcal{L}_B h)^{\alpha\beta}\omega_\sigma + \Delta^\alpha_{\sigma\mu}h^{\mu\beta} + \Delta^\beta_{\sigma\nu}h^{\alpha\nu}.$$

Mit

$$\Delta^\alpha_{\sigma\tau} = \pi^\alpha_\mu(\Delta^\mu_{(\sigma\tau)} + \Delta^\mu_{[\sigma\tau]}) + B^\alpha\omega_\mu\Delta^\mu_{\sigma\tau} = \widetilde{\Delta}^\alpha_{\sigma\tau} + B^\alpha\chi_{\sigma\tau}$$

entsteht daraus:

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_B h)^{\alpha\beta}\omega_\sigma + h^{\mu(\alpha}(\widetilde{\Delta}^{\beta)}_{\sigma\mu} + B^{\beta)}\chi_{\sigma\mu}) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_B h)^{\alpha\beta}\omega_\sigma + h^{\mu(\alpha}\widetilde{\Delta}^{\beta)}_{\sigma\mu} + B^{(\alpha}k^{\beta)\mu}\chi_{\sigma\mu}.
\end{aligned} \tag{61}$$

Aus $\hat{\pi}(\Delta) = 0$ ergibt sich für $\widetilde{\Delta}^\alpha_{\beta\gamma}$ die folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^\alpha_{\beta\gamma} &= \widetilde{\Delta}^\alpha_{\beta\nu}(\pi^\nu_\gamma + B^\nu\omega_\gamma) \\
&= 2\widetilde{\Delta}^\alpha_{\mu\nu}B^\mu\omega_{(\beta}\pi^\nu_{\gamma)} + \widetilde{\Delta}^\alpha_{\mu\nu}B^\mu B^\nu\omega_\beta\omega_\gamma \\
&= k^{\alpha\sigma}(2C_{\sigma(\beta}\,\omega_{\gamma)} + E_\sigma\omega_\beta\omega_\gamma).
\end{aligned}$$

Dabei seien:

$$C_{\sigma\tau} := \gamma_{\sigma\alpha}\widetilde{\Delta}^\alpha_{\mu\nu}B^\mu\pi^\nu_\tau, \qquad E_\sigma := \gamma_{\sigma\alpha}\widetilde{\Delta}^\alpha_{\mu\nu}B^\mu B^\nu. \tag{62}$$

Einsetzen in (61) beschert uns:

$$\begin{aligned}0 &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_B h)^{\alpha\beta}\omega_\sigma + h^{\mu(\alpha}k^{\beta)\eta}(2C_{\eta(\sigma}\,\omega_{\mu)} + E_\eta\omega_\sigma\omega_\mu) + B^{(\alpha}k^{\beta)\mu}\chi_{\sigma\mu}\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_B h)^{\alpha\beta}\omega_\sigma + k^{\alpha\mu}k^{\beta\nu}C_{(\mu\nu)}\omega_\sigma + B^{(\alpha}k^{\beta)\eta}\big(-\lambda(C_{\eta\sigma} + E_\eta\omega_\sigma) + \chi_{\sigma\eta}\big).\end{aligned}$$

Dies läßt sich bezüglich des Index σ zerlegen in:

$$\begin{aligned}0 &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_B h)^{\alpha\beta} + k^{\alpha\mu}k^{\beta\nu}C_{(\mu\nu)} - \lambda B^{(\alpha}k^{\beta)\mu}E_\mu,\\ 0 &= B^{(\alpha}k^{\beta)\eta}(-\lambda C_{\eta\sigma} + \chi_{\sigma\eta}).\end{aligned}$$

Die erste Gleichung kann man noch weiter aufspalten, und die zweite läßt sich vereinfachen. Das ergibt:

$$\begin{aligned}C_{(\sigma\tau)} &= -\tfrac{1}{2}\gamma_{\sigma\alpha}\gamma_{\tau\beta}(\mathcal{L}_B h)^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_B\gamma)_{\sigma\tau},\\ \lambda E_\sigma &= \omega_\alpha\gamma_{\beta\sigma}(\mathcal{L}_B h)^{\alpha\beta} = -(\mathcal{L}_B\omega)_\sigma,\\ \lambda C_{[\sigma\tau]} &= \chi_{[\tau\sigma]}.\end{aligned} \tag{63}$$

Dabei habe ich für die dritte Gleichung die erste und Gleichung (56) benutzt, um den symmetrischen Anteil zu entfernen. Die Teile E_σ und $C_{[\sigma\tau]}$, nach denen man im allgemeinen nicht auflösen kann, fasse ich zusammen in

$$F_{\mu\nu} := C_{[\mu\nu]} + E_{[\mu}\omega_{\nu]}. \tag{64}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}C_{[\sigma\tau]} &= \pi^\mu_\sigma\pi^\nu_\tau F_{\mu\nu}, \qquad E_\sigma = 2\pi^\mu_\sigma F_{\mu\nu}B^\nu,\\ \widetilde{\Delta}^\alpha_{\beta\gamma} &= k^{\alpha\sigma}\big(2\omega_{(\beta}(\tfrac{1}{2}\dot\gamma_{\gamma)\sigma} - \pi^\mu_{\gamma)}\pi^\nu_\sigma F_{\mu\nu}) + 2\pi^\mu_\sigma F_{\mu\nu}B^\nu\omega_\beta\omega_\gamma\big)\\ &= k^{\alpha\sigma}\big(\dot\gamma_{\sigma(\beta}\,\omega_{\gamma)} + 2(-\omega_{(\beta}\pi^\mu_{\gamma)}F_{\mu\sigma} + F_{\sigma\nu}B^\nu\omega_\beta\omega_\gamma)\big)\\ &= k^{\alpha\sigma}\big(\dot\gamma_{\sigma(\beta}\,\omega_{\gamma)} + 2F_{\sigma(\beta}\,\omega_{\gamma)}\big).\end{aligned} \tag{65}$$

Die letzten beiden Gleichungen von (63) lassen sich kombinieren:

$$\begin{aligned}\lambda F_{\mu\nu} &= \chi_{[\nu\mu]} - (\mathcal{L}_B\omega)_{[\mu}\omega_{\nu]}\\ &= \pi^\sigma_\nu\pi^\tau_\mu\omega_{[\sigma,\tau]} - \omega_{[\mu,\sigma]}B^\sigma\omega_\nu + \omega_{[\nu,\tau]}B^\tau\omega_\mu\\ &= \omega_{[\nu,\mu]}.\end{aligned} \tag{66}$$

Multipliziert man (65) mit λ und berücksichtigt (66), so erhält man die einzige übriggebliebene Gleichung (57), die damit auch erfüllt ist. Zusammengefaßt folgt für $\Delta^\alpha_{\beta\gamma}$:

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha_{(\beta\gamma)} &= B^\alpha\omega_\mu\Delta^\mu_{(\beta\gamma)} + \widetilde{\Delta}^\alpha_{\beta\gamma}\\ &= \tfrac{1}{2}\lambda B^\alpha\dot\gamma_{\beta\gamma} + k^{\alpha\sigma}(\dot\gamma_{\sigma(\beta}\omega_{\gamma)} + 2F_{\sigma(\beta}\omega_{\gamma)})\\ &= h^{\alpha\sigma}(\dot\gamma_{\sigma(\beta}\,\omega_{\gamma)} - \tfrac{1}{2}\dot\gamma_{\beta\gamma}\omega_\sigma) + 2k^{\alpha\sigma}F_{\sigma(\beta}\,\omega_{\gamma)},\end{aligned}$$

und genau so steht es in der Behauptung des Satzes.

Damit ist die Äquivalenz von Axiom 4(a) mit der angegebenen Darstellung des Zusammenhanges gezeigt. Es bleibt nur noch zu beweisen, daß bei Gültigkeit des Axioms auch folgt:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\bullet\delta}^{\ \gamma} - R^{\gamma}{}_{\delta\bullet\beta}^{\ \alpha} = 0 \iff F_{[\mu\nu,\sigma]} = 0.$$

Bei $\lambda \neq 0$ sind beide Aussagen wahr und folglich auch äquivalent. Also kann ich mich auf den Fall $\lambda = 0$ beschränken. Aus dem gerade gezeigten folgt dann:

$$\Delta^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = k^{\alpha\sigma}(\dot{\gamma}_{\sigma(\beta} + 2F_{\sigma(\beta)}\,\omega_{\gamma)}, \qquad \omega_{[\mu,\nu]} = 0.$$

Es gilt also $D^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ und $\Delta^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = 0$. Da die Bildräume von $\hat{\pi}$ somit lokal zu Hyperflächen integrabel sind, ist $\widetilde{\nabla}$ jetzt (lokal) der Levi-Civita-Zusammenhang zu $\gamma_{\mu\nu}$ in diesen Untermannigfaltigkeiten, und $\widetilde{R}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ ist der zugehörige Riemann-Tensor. Also folgt:

$$\widetilde{R}^{\alpha}{}_{\beta\bullet\delta}^{\ \gamma} - \widetilde{R}^{\gamma}{}_{\delta\bullet\beta}^{\ \alpha} = 0.$$

Die Darstellung (38) liefert uns:

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\bullet\delta}^{\ \gamma} &= R^{\alpha}{}_{\beta\tau\delta}h^{\tau\gamma} = \\ = \widetilde{R}^{\alpha}{}_{\beta\bullet\delta}^{\ \gamma} &+ h^{\gamma\tau}(\Delta^{\alpha}_{\delta\beta;\tau} - \Delta^{\alpha}_{\tau\beta;\delta} + \Delta^{\alpha}_{\delta\mu}\Delta^{\mu}_{\tau\beta} - \Delta^{\alpha}_{\tau\mu}\Delta^{\mu}_{\delta\beta}) - \omega_{\delta}Q^{\alpha}_{\tau\beta}h^{\tau\gamma}. \end{aligned}$$

Im folgenden werden $k^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}$, $h^{\alpha\beta}{}_{;\sigma} = 0$ und $\omega_{\mu;\nu} = 0$ (aus (36)) verwendet:

$$\begin{aligned} h^{\gamma\tau}\Delta^{\alpha}_{\delta\beta;\tau} &= h^{\alpha\sigma}h^{\gamma\tau}\omega_{(\beta}\,(\dot{\gamma}_{\delta)\sigma;\tau} - 2F_{\delta)\sigma;\tau}), \\ h^{\gamma\tau}\Delta^{\alpha}_{\tau\beta;\delta} &= \tfrac{1}{2}h^{\alpha\sigma}h^{\gamma\tau}\omega_{\beta}(\dot{\gamma}_{\sigma\tau;\delta} + 2F_{\sigma\tau;\delta}), \\ h^{\gamma\tau}\Delta^{\alpha}_{\delta\mu}\Delta^{\mu}_{\tau\beta} &= \tfrac{1}{4}h^{\alpha\sigma}h^{\gamma\tau}\omega_{\beta}\omega_{\delta}(\dot{\gamma}_{\sigma\mu} + 2F_{\sigma\mu})h^{\mu\nu}(\dot{\gamma}_{\nu\tau} + 2F_{\nu\tau}), \\ h^{\gamma\tau}\Delta^{\alpha}_{\tau\mu}\Delta^{\mu}_{\delta\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Sammeln wir das alles auf, so finden wir:

$$\begin{aligned} &R^{\alpha}{}_{\beta\bullet\delta}^{\ \gamma} - R^{\gamma}{}_{\delta\bullet\beta}^{\ \alpha} \\ &= h^{\alpha\sigma}h^{\gamma\tau}\Big(-2\omega_{(\beta}\,F_{\delta)\sigma;\tau} - \omega_{\beta}F_{\sigma\tau;\delta} + 2\omega_{(\beta}\,F_{\delta)\tau;\sigma} + \omega_{\delta}F_{\tau\sigma;\beta} \\ &\qquad + \omega_{(\beta}\dot{\gamma}_{\delta)\sigma;\tau} - \tfrac{1}{2}\omega_{\beta}\dot{\gamma}_{\sigma\tau;\delta} - \omega_{(\beta}\dot{\gamma}_{\delta)\tau;\sigma} + \tfrac{1}{2}\omega_{\delta}\dot{\gamma}_{\tau\sigma;\beta} \\ &\qquad + \tfrac{1}{4}\omega_{\beta}\omega_{\delta}h^{\mu\nu}\big((\dot{\gamma}_{\sigma\mu} + 2F_{\sigma\mu})(\dot{\gamma}_{\nu\tau} + 2F_{\nu\tau}) - (\dot{\gamma}_{\tau\mu} + 2F_{\tau\mu})(\dot{\gamma}_{\nu\sigma} + 2F_{\nu\sigma})\big)\Big) \\ &\quad - \omega_{\delta}Q^{\alpha}_{\tau\beta}h^{\tau\gamma} + \omega_{\beta}h^{\alpha\sigma}Q^{\gamma}_{\sigma\delta} \\ &= h^{\alpha\sigma}h^{\gamma\tau}\Big(\omega_{\beta}\big(F_{\tau\sigma;\delta} + F_{\sigma\delta;\tau} + F_{\delta\tau;\sigma} + \tfrac{1}{2}(\dot{\gamma}_{\delta\sigma;\tau} - \dot{\gamma}_{\sigma\tau;\delta} - \dot{\gamma}_{\delta\tau;\sigma}) + \gamma_{\tau\eta}Q^{\eta}_{\sigma\delta}\big) \\ &\quad + \omega_{\delta}\big(F_{\sigma\beta;\tau} + F_{\beta\tau;\sigma} + F_{\tau\sigma;\beta} + \tfrac{1}{2}(\dot{\gamma}_{\beta\sigma;\tau} - \dot{\gamma}_{\beta\tau;\sigma} + \dot{\gamma}_{\tau\sigma;\beta}) - \gamma_{\sigma\eta}Q^{\eta}_{\tau\beta}\big) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\omega_{\beta}\omega_{\delta}h^{\mu\nu}(\dot{\gamma}_{\sigma\mu}F_{\nu\tau} + F_{\sigma\mu}\dot{\gamma}_{\nu\tau} - F_{\tau\mu}\dot{\gamma}_{\nu\sigma} - \dot{\gamma}_{\tau\mu}F_{\nu\sigma})\Big) \\ &= h^{\alpha\sigma}h^{\gamma\tau}\big(\omega_{\beta}(3F_{[\tau\sigma;\delta]} + S_{\tau\sigma\delta}) + \omega_{\delta}(3F_{[\tau\sigma;\beta]} - S_{\sigma\tau\beta}) - 2\omega_{\beta}\omega_{\delta}h^{\mu\nu}\dot{\gamma}_{\mu[\sigma}F_{\tau]\nu}\big). \end{aligned}$$

Dabei sei:

$$\begin{aligned}
&S_{\tau\sigma\delta}\\
&:= \gamma_{\tau\eta} Q^{\eta}_{\sigma\delta} - \tfrac{1}{2}\pi^{\nu}_{\tau}\pi^{\mu}_{\sigma}(\dot\gamma_{\nu\mu;\delta} + \dot\gamma_{\delta\nu;\mu} - \dot\gamma_{\mu\delta;\nu})\\
&= \pi^{\mu}_{\sigma}\pi^{\nu}_{\tau}\big(- (\mathcal{L}_B\dot\gamma)_{\nu(\mu}\,\omega_{\delta)} + \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_B\dot\gamma)_{\mu\delta}\omega_\nu + \Delta^{\eta}_{\nu(\delta}\dot\gamma_{\mu)\eta} + \Delta^{\eta}_{\mu\delta}\dot\gamma_{\nu\eta} - \Delta^{\eta}_{\nu(\mu}\dot\gamma_{\delta)\eta}\big)\\
&= -\tfrac{1}{2}\ddot\gamma_{\tau\sigma}\omega_\delta + \tfrac{1}{2}h^{\eta\mu}\omega_\delta(\dot\gamma_{\mu\sigma} + F_{\mu\nu}\pi^{\nu}_{\sigma})\dot\gamma_{\tau\eta}\\
&= \omega_\delta\big(\tfrac{1}{2}(h^{\mu\nu}\dot\gamma_{\sigma\mu}\dot\gamma_{\tau\nu} - \ddot\gamma_{\sigma\tau}) + h^{\mu\nu}F_{\mu\eta}\pi^{\eta}_{\sigma}\dot\gamma_{\tau\nu}\big).
\end{aligned}$$

Dafür wurden die noch zu beweisende Darstellung (52) von Q und die Gleichung (32) für $\dot\gamma_{\mu\nu}$ benutzt. Setzen wir all dies nun ein und berücksichtigen $F_{[\mu\nu;\sigma]} = F_{[\mu\nu,\sigma]}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}_{\bullet}{}_{\delta} - R^{\gamma}{}_{\delta}{}^{\alpha}_{\bullet}{}_{\beta}\\
&= h^{\alpha\sigma}h^{\gamma\tau}\big(3(\omega_\beta F_{[\tau\sigma,\delta]} + \omega_\delta F_{[\tau\sigma,\beta]}) + \omega_\beta\omega_\delta h^{\mu\nu}(F_{\mu\sigma}\dot\gamma_{\tau\nu} - F_{\mu\tau}\dot\gamma_{\sigma\nu} - 2\dot\gamma_{\mu[\sigma}F_{\tau]\nu})\big)\\
&= 3h^{\alpha\sigma}h^{\gamma\tau}(\omega_\beta F_{[\tau\sigma,\delta]} + \omega_\delta F_{[\tau\sigma,\beta]}).
\end{aligned} \tag{67}$$

Gilt also $dF = 0$, so ist auch Axiom 4(b) erfüllt. Umgekehrt bekommt man durch Kontraktion mit $B^\beta B^\delta$ bzw. $B^\beta \pi^{\delta}_{\eta}$:

$$\pi^{\sigma}_{\alpha}\pi^{\tau}_{\beta}F_{[\sigma\tau,\mu]}B^\mu = 0, \quad \pi^{\sigma}_{\alpha}\pi^{\tau}_{\beta}F_{[\sigma\tau,\mu]}\pi^{\mu}_{\nu} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \pi^{\sigma}_{\alpha}\pi^{\tau}_{\beta}F_{[\sigma\tau,\mu]} = 0.$$

Das schreibe ich als:

$$0 = F_{[\alpha\beta,\mu]} - \omega_\alpha B^\sigma F_{[\sigma\beta,\mu]} - \omega_\beta B^\tau F_{[\alpha\tau,\mu]}.$$

Kontrahieren mit B^μ ergibt $F_{[\alpha\beta,\mu]}B^\mu = 0$, und das wieder eingesetzt führt auf

$$F_{[\alpha\beta,\mu]} = 0,$$

quod erat demonstrandum.

Damit ist nur noch die Darstellung (52) nachzutragen (jetzt wieder für allgemeines λ). Wendet man (42) speziell auf $\gamma_{\mu\nu}$ an und benutzt $\widetilde\nabla\gamma = 0$, so findet man:

$$\dot\gamma_{\mu\nu\|\sigma} = 2(\omega_{[\sigma,\tau]}B^\tau\dot\gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\eta(\mu}Q^{\eta}_{\nu)\sigma}). \tag{68}$$

Wenn man dies auf die übliche Art verarztet (zyklisches Permutieren der Indizes, Addieren zweier und Subtraktion der dritten Gleichung, Ausnutzen der Symmetrie von Q), so erhält man gerade die behauptete Darstellung. ■

$F_{\mu\nu} = C_{[\mu\nu]} + E_{[\mu}\omega_{\nu]}$ ist in der vorangegangenen Rechnung nur mathematisch motiviert eingeführt worden. Was aber bedeutet es physikalisch? Dazu gehen wir rückwärts:

$$C_{\sigma\tau} \underset{(62)}{=} \gamma_{\sigma\alpha}\widetilde\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}B^\mu\pi^{\nu}_{\tau} \underset{(29)}{=} \gamma_{\sigma\alpha}B^{\alpha}{}_{;\nu}\pi^{\nu}_{\tau}, \qquad E_\sigma \underset{(62)}{=} \gamma_{\sigma\alpha}\widetilde\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}B^\mu B^\nu \underset{(29)}{=} \gamma_{\sigma\alpha}B^{\alpha}{}_{;\mu}B^\mu. \tag{69}$$

Folglich gilt $C_{\sigma\tau} + E_\sigma\omega_\tau = \gamma_{\sigma\alpha}B^\alpha{}_{;\tau}$, und mit $\omega_\mu B^\mu{}_{;\tau} = 0$ erhält man daraus:

$$B^\alpha{}_{;\beta} = k^{\alpha\mu}(C_{\mu\beta} + E_\mu\omega_\beta).$$

Definieren wir

$$\Theta_{\mu\nu} := C_{(\mu\nu)}, \quad \vartheta := k^{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu} := \Theta_{\mu\nu} - \tfrac{1}{3}\vartheta\,\gamma_{\mu\nu}, \quad \Omega_{\mu\nu} := C_{[\mu\nu]}, \tag{70}$$

so schreibt sich dies als:

$$B^\alpha{}_{;\beta} = k^{\alpha\mu}(E_\mu\omega_\beta + \sigma_{\mu\beta} + \tfrac{1}{3}\vartheta\,\gamma_{\mu\beta} + \Omega_{\mu\beta}). \tag{71}$$

Dies ist die übliche „hydrodynamische“ Zerlegung der kovarianten Ableitung eines zeitartigen normierten Vektorfeldes in Linearbeschleunigung E_μ, Volumenexpansion ϑ, Scherungstensor $\sigma_{\mu\nu}$ und Wirbeltensor $\Omega_{\mu\nu}$. Es folgt:

$$F_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} + E_{[\mu}\omega_{\nu]} = \gamma_{\eta[\mu}B^\eta{}_{;\nu]}, \qquad \Theta_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}_{\mu\nu}. \tag{72}$$

Die Gleichung $dF = 0$ sieht in diesen Variablen so aus:

$$0 = d(\Omega + E\wedge\omega) = d\Omega + dE\wedge\omega - \lambda\,E\wedge F = d\Omega + dE\wedge\omega - \lambda\,E\wedge\Omega. \tag{73}$$

Dabei habe ich $d\omega = \lambda F$ benutzt. Einsetzen von B in eines der drei Argumente beschert uns:

$$\begin{aligned}
0 &= 3(\Omega_{[\mu\nu,\sigma]} + E_{[\nu,\mu}\,\omega_{\sigma]})B^\sigma \\
&= (\Omega_{\mu\nu,\sigma} + \Omega_{\sigma\mu,\nu} + \Omega_{\nu\sigma,\mu})B^\sigma + E_{[\nu,\mu]} + E_{[\mu,\sigma]}B^\sigma\omega_\nu + E_{[\sigma,\nu]}B^\sigma\omega_\mu \\
&= \Omega_{\mu\nu,\sigma}B^\sigma + B^\sigma{}_{,\nu}\Omega_{\mu\sigma} + B^\sigma{}_{,\mu}\Omega_{\sigma\nu} + E_{[\sigma,\mu]}\pi^\sigma_\nu - E_{[\nu,\tau]}B^\tau\omega_\mu \\
&= (\mathcal{L}_B\Omega)_{\mu\nu} + \pi^\sigma_\nu\pi^\tau_\mu E_{[\sigma,\tau]}.
\end{aligned}$$

Der Rest von (73) besteht aus der vollständigen Projektion:

$$0 = \hat{\pi}(d\Omega) - \lambda\,E\wedge\Omega.$$

Berücksichtigt man noch $E_{[\mu\|\nu]} = \pi^\sigma_\mu\pi^\tau_\nu E_{[\sigma,\tau]}$ und Entsprechendes für $\hat{\pi}(d\Omega)$, so findet man:

$$dF = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} (\mathcal{L}_B\Omega)_{\mu\nu} = E_{[\mu\|\nu]}, \\ \quad \Omega_{[\mu\nu\|\sigma]} = \lambda E_{[\mu}\,\Omega_{\nu\sigma]}. \end{cases} \tag{74}$$

2.2.4. Die Materie-Axiome

Die Einsteinschen Feldgleichungen,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T^{\bullet\bullet}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}T^{\sigma}{}^{\bullet}_{\sigma} g_{\mu\nu}),$$

ergeben durch die Symmetrie der rechten Seite keine zusätzliche Forderung an den Ricci-Tensor, denn dieser ist auch bei $\lambda = 0$ symmetrisch. Dies liegt daran, daß der Krümmungstensor der Rahmentheorie neben den üblichen Eigenschaften des Riemann-Tensors zu einem torsionsfreien Zusammenhang,

$$R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0, \qquad R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta;\epsilon]} = 0, \tag{75}$$

(letzteres nur, wenn der Zusammenhang mindestens C^2 ist) auch die Eigenschaft

$$R^{\mu}{}_{\mu\gamma\delta} = 0 \tag{76}$$

besitzt (so daß die Rahmentheorie ein invariantes Volumenelement zuläßt).

Beweis: Aus $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$, $h^{\alpha\beta}{}_{;\sigma} = 0$ erhält man:

$$\begin{array}{rclclcl} 0 &=& g_{\mu\nu;[\sigma\tau]} &=& \frac{1}{2}(g_{\mu\eta}R^{\eta}{}_{\nu\sigma\tau} + g_{\eta\nu}R^{\eta}{}_{\mu\sigma\tau}) &=& R^{\bullet}_{(\mu\nu)\sigma\tau}, \\ 0 &=& h^{\alpha\beta}{}_{;[\sigma\tau]} &=& \frac{1}{2}(R^{\alpha}{}_{\eta\tau\sigma}h^{\eta\beta} + R^{\beta}{}_{\eta\tau\sigma}h^{\alpha\eta}) &=& R^{(\alpha\beta)}{}_{\bullet\tau\sigma}. \end{array} \tag{77}$$

Sei jetzt $p \in M$, B ein zeitartiger normierter Vektor in T_pM, und ω_μ, π^{α}_{β}, $\gamma_{\sigma\tau}$ seien definiert wie üblich. Es gilt in p:

$$\begin{aligned} R^{\mu}{}_{\mu\gamma\delta} &= (\pi^{\mu}_{\nu} + B^{\mu}\omega_{\nu})R^{\nu}{}_{\mu\gamma\delta} = (\gamma_{\nu\sigma}h^{\sigma\mu} + g_{\nu\sigma}B^{\sigma}B^{\mu})R^{\nu}{}_{\mu\gamma\delta} = \\ &= \gamma_{\nu\sigma}R^{\nu\sigma}{}_{\bullet\gamma\delta} + R^{\bullet}_{\sigma\mu\gamma\delta}B^{\sigma}B^{\mu} = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Damit folgt nun:

$$R_{[\mu\nu]} = \tfrac{1}{2}(R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} - R^{\sigma}{}_{\nu\sigma\mu}) = \tfrac{1}{2}(R^{\sigma}{}_{\sigma\mu\nu} - 3R^{\sigma}{}_{[\sigma\mu\nu]}) = 0. \tag{78}$$

Lemma 7. *Die Axiome 1–4 sollen gelten. Zu einem gegebenen zeitartigen Vektorfeld B bestimme man* ω_μ, π^α_β, $\gamma_{\mu\nu}$, $k^{\alpha\beta}$, E_μ, $\Omega_{\sigma\tau}$, $\Theta_{\mu\nu}$ *und* ϑ. *Ferner seien:*

$$\Theta := \sqrt{\tfrac{1}{2}\Theta_{\mu\nu}\Theta^{\mu\nu}_{\bullet\bullet}}, \qquad \Omega := \sqrt{\tfrac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu}_{\bullet\bullet}}, \qquad E := \sqrt{E_\sigma E^\sigma_\bullet}. \tag{79}$$

Punkte über einem Symbol mögen die Lie-Ableitung nach B bezeichnen.
Mit $\widetilde{R}_{\mu\nu} := \widetilde{R}^\sigma{}_{\mu\sigma\nu}$ *ergibt sich:*

$$R_{\sigma\tau}B^\sigma B^\tau = E^\sigma_{\bullet\|\sigma} + \lambda E^2 + 2(\Omega^2 - \Theta^2) - \dot{\vartheta}, \tag{80}$$

$$\pi^\sigma_\mu R_{\sigma\tau}B^\tau = (\Theta^\sigma_{\bullet\mu} + \Omega^\sigma_{\bullet\mu})_{\|\sigma} - \vartheta_{\|\mu} + \lambda 2E^\eta_\bullet\,\Omega_{\eta\mu}, \tag{81}$$

$$\begin{aligned}\pi^\sigma_\mu\pi^\tau_\nu R_{\sigma\tau} &= \widetilde{R}_{(\mu\nu)} - \lambda^2 E_\mu E_\nu \\ &\quad + \lambda\big(\dot{\Theta}_{\mu\nu} + \vartheta\Theta_{\mu\nu} + 2(\Omega_{\eta\mu}\,\Omega^\eta_{\bullet\nu} - \Theta_{\eta\mu}\,\Theta^\eta_{\bullet\nu}) - E_{(\mu\|\nu)}\big).\end{aligned} \tag{82}$$

Die Gleichung (80) ist die Raychaudhuri-Gleichung ($E^\sigma_{\bullet\|\sigma} + \lambda E^2 = E^\sigma_{\bullet;\sigma}$), während man (81) im Fall von $\lambda \neq 0$, $\chi_{[\mu\nu]} = 0$ als die Gleichungen von Mainardi-Codazzi bezeichnet.

Beweis: Aus der Darstellung (38) im Lemma 6 erhält man:

$$R_{\beta\delta} = \widetilde{R}_{\beta\delta} + \Delta^\alpha_{\delta\beta;\alpha} - \Delta^\alpha_{\alpha\beta;\delta} + \Delta^\alpha_{\delta\mu}\Delta^\mu_{\alpha\beta} - \Delta^\alpha_{\alpha\mu}\Delta^\mu_{\delta\beta} + q_{\delta\beta} - \omega_\delta Q^\alpha_{\alpha\beta}. \tag{83}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha_{\alpha\beta} &= \Delta^\alpha_{(\alpha\beta)} = h^{\alpha\sigma}(2\Theta_{\sigma(\beta}\,\omega_{\alpha)} - \Theta_{\alpha\beta}\omega_\sigma) + 2k^{\alpha\sigma}F_{\sigma(\alpha}\,\omega_{\beta)} = \vartheta\,\omega_\beta, \\ Q^\alpha_{\alpha\beta} &= k^{\alpha\sigma}(2\Theta_{\sigma(\alpha\|\beta)} - \Theta_{\alpha\beta\|\sigma} + \dot{\omega}_\sigma\Theta_{\alpha\beta} - \dot{\omega}_\alpha\Theta_{\beta\sigma} - \dot{\omega}_\beta\Theta_{\sigma\alpha}) \\ &= k^{\alpha\sigma}(\Theta_{\sigma\alpha\|\beta} - \dot{\omega}_\beta\Theta_{\sigma\alpha}) = \vartheta_{\|\beta} - \vartheta\dot{\omega}_\beta,\end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha_{\alpha\beta;\delta} + \Delta^\alpha_{\alpha\mu}\Delta^\mu_{\delta\beta} + \omega_\delta Q^\alpha_{\alpha\beta} &= \Delta^\alpha_{\alpha\beta\|\delta} + (\mathcal{L}_B\Delta^\alpha_{\alpha\beta})_\beta\omega_\delta + \omega_\beta(\Delta^\alpha_{\alpha\sigma}B^\sigma)_{\|\delta} + \omega_\delta Q^\alpha_{\alpha\beta} \\ &= (\dot{\vartheta}\omega_\beta + \vartheta\dot{\omega}_\beta)\omega_\delta + \omega_\beta\vartheta_{\|\delta} + \omega_\delta(\vartheta_{\|\beta} - \vartheta\dot{\omega}_\beta) \\ &= \dot{\vartheta}\omega_\beta\omega_\delta + 2\vartheta_{\|(\beta}\,\omega_{\delta)}.\end{aligned} \tag{84}$$

Als nächstes ist $\Delta^\alpha_{\delta\beta;\alpha}$ zu zerlegen. Dazu braucht man die (31) entsprechende Formel für einen $\binom{1}{2}$-Tensor. Wie wird die wohl aussehen? Richtig! Genau so:

$$\begin{aligned}S^\alpha_{\beta\gamma;\delta} &= S^\alpha_{\beta\gamma\|\delta} + (\mathcal{L}_B S)^\alpha_{\beta\gamma}\omega_\delta + \omega_\beta(S^\alpha_{\sigma\gamma}B^\sigma)_{\|\delta} + \omega_\gamma(S^\alpha_{\beta\tau}B^\tau)_{\|\delta} + \omega_\beta\omega_\gamma(S^\alpha_{\sigma\tau}B^\sigma B^\tau)_{\|\delta} \\ &\quad + B^\alpha\big((\omega_\mu S^\mu_{\beta\gamma})_{\|\delta} + \omega_\beta(\omega_\mu S^\mu_{\sigma\gamma}B^\sigma)_{\|\delta} + \omega_\gamma(\omega_\mu S^\mu_{\beta\tau}B^\tau)_{\|\delta} + \omega_\beta\omega_\gamma(\omega_\mu S^\mu_{\sigma\tau}B^\sigma B^\tau)_{\|\delta}\big) \\ &\quad + \Delta^\alpha_{\delta\mu}S^\mu_{\beta\gamma} - \Delta^\sigma_{\delta\beta}S^\alpha_{\sigma\gamma} - \Delta^\tau_{\delta\gamma}S^\alpha_{\beta\tau}.\end{aligned} \tag{85}$$

Hier vereinfacht es sich zu:

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha_{\delta\beta;\alpha} + \Delta^\alpha_{\delta\mu}\Delta^\mu_{\alpha\beta} = (\mathcal{L}_B\Delta)^\alpha_{\delta\beta}\omega_\alpha + \omega_\delta(\Delta^\alpha_{\sigma\beta}B^\sigma)_{\|\alpha} + \omega_\beta(\Delta^\alpha_{\delta\tau}B^\tau)_{\|\alpha} \\ + \omega_\delta\omega_\beta(\Delta^\alpha_{\sigma\tau}B^\sigma B^\tau)_{\|\alpha} + \Delta^\alpha_{\alpha\mu}\Delta^\mu_{\delta\beta} - \Delta^\sigma_{\alpha\delta}\Delta^\alpha_{\sigma\beta}.\end{aligned} \tag{86}$$

Die Lie-Ableitung wird umgeschaufelt:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_B\Delta)^\alpha_{\delta\beta}\omega_\alpha &= \mathcal{L}_B(\Delta^\alpha_{\delta\beta}\omega_\alpha) - \Delta^\alpha_{\delta\beta}\dot\omega_\alpha \\ &= \dot\chi_{\delta\beta} - \dot\omega 2k^{\alpha\sigma}(\Theta_{\sigma(\delta} + F_{\sigma(\delta})\omega_{\beta)} \\ &= \dot\chi_{\delta\beta} - \dot\omega_\alpha k^{\alpha\sigma}(2\psi_{\sigma(\delta} + E_\sigma\omega_{(\delta})\omega_{\beta)}.\end{aligned}$$

Dabei habe ich zur Abkürzung verwendet:

$$\chi_{\mu\nu} = \omega_\sigma\Delta^\sigma_{\mu\nu} = \chi_{[\mu\nu]} + \lambda\Theta_{\mu\nu}, \qquad \psi_{\mu\nu} := \Theta_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu}. \tag{87}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha_{\sigma\beta}B^\sigma &= \Delta^\alpha_{(\sigma\beta)}B^\sigma = h^{\alpha\tau}\Theta_{\tau\beta} + 2k^{\alpha\tau}F_{\tau(\sigma}\,\omega_{\beta)}B^\sigma \\ &= k^{\alpha\tau}(\Theta_{\tau\beta} + E_\tau\omega_\beta + \Omega_{\tau\beta}) \\ &= \psi^\alpha_{\bullet\beta} + E^\alpha_\bullet\omega_\beta, \\ \Delta^\alpha_{\alpha\mu}\Delta^\mu_{\delta\beta} &= \vartheta\,\chi_{\delta\beta}, \\ \Delta^\sigma_{\alpha\delta}\Delta^\alpha_{\sigma\beta} &= \big(B^\sigma\chi_{\alpha\delta} + 2k^{\sigma\tau}(\Theta_{\tau(\alpha} + F_{\tau(\alpha})\omega_{\delta)}\big)\big(B^\alpha\chi_{\sigma\beta} + 2k^{\alpha\nu}(\Theta_{\nu(\sigma} + F_{\nu(\sigma})\omega_{\beta)}\big) \\ &= \big(B^\sigma\chi_{\mu\delta} + k^{\sigma\tau}(2\psi_{\tau(\mu}\omega_{\delta)} + E_\tau\omega_\mu\omega_\delta)\big)\big(B^\mu\chi_{\sigma\beta} + k^{\mu\nu}(2\psi_{\nu(\sigma}\omega_{\beta)} + E_\nu\omega_\sigma\omega_\delta)\big) \\ &= \chi_{\mu\delta}k^{\mu\nu}(\psi_{\nu\beta} + E_\nu\omega_\beta) + k^{\sigma\tau}(\psi_{\tau\delta} + E_\tau\omega_\delta)\chi_{\sigma\beta} + k^{\mu\nu}k^{\sigma\tau}\psi_{\tau\mu}\psi_{\nu\sigma}\omega_\beta\omega_\delta \\ &= 2(\psi_{\nu(\beta} + E_\nu\omega_{(\beta})\chi^\nu_{\bullet\delta)} + 2(\Theta^2 - \Omega^2)\omega_\beta\omega_\delta,\end{aligned}$$

da:

$$\begin{aligned}k^{\sigma\tau}\psi_{\tau(\mu}\psi_{\nu)\sigma} &= k^{\sigma\tau}(\Theta_{\tau(\mu} + \Omega_{\tau(\mu})(\Theta_{\nu)\sigma} + \Omega_{\nu)\sigma}) \\ &= \Theta_{\tau(\mu}\Theta^\tau_{\bullet\nu)} + k^{\sigma\tau}(\Omega_{\tau(\mu}\Theta_{\nu)\sigma} - \Omega_{\sigma(\nu}\Theta_{\mu)\tau}) - \Omega_{\tau(\mu}\Omega^\tau_{\bullet\nu)} \\ &= \Theta_{\tau\mu}\Theta^\tau_{\bullet\nu} - \Omega_{\tau\mu}\Omega^\tau_{\bullet\nu},\end{aligned} \tag{88}$$

und somit:

$$k^{\mu\nu}k^{\sigma\tau}\psi_{\tau\mu}\psi_{\nu\sigma} = 2(\Theta^2 - \Omega^2).$$

Setzen wir all das in (86) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha_{\delta\beta;\alpha} + \Delta^\alpha_{\delta\mu}\Delta^\mu_{\alpha\beta} = \dot\chi_{\delta\beta} - \dot\omega_\alpha(2\psi^\alpha_{\bullet(\delta} + E^\alpha_\bullet\omega_{(\delta})\omega_{\beta)} + 2\omega_{(\delta}\psi^\alpha_{\bullet\beta)\|\alpha} \\ + \omega_\beta\omega_\delta E^\alpha_{\bullet\|\alpha} + \vartheta\,\chi_{\delta\beta} - 2(\psi_{\mu(\beta} + E_\mu\omega_{(\beta})\chi^\mu_{\bullet\delta)} - 2(\Theta^2 - \Omega^2)\omega_\beta\omega_\delta.\end{aligned} \tag{89}$$

Die Gleichung $d\omega = \lambda F$ besteht aus den Teilen:

$$\begin{aligned}\dot\omega_\mu &= 2\omega_{[\mu,\nu]}B^\nu = 2\lambda F_{\nu\mu}B^\nu = -\lambda E_\mu, \\ \chi_{[\mu\nu]} &= \pi^\sigma_\mu\pi^\tau_\nu\omega_{[\sigma,\tau]} = \lambda\pi^\sigma_\mu\pi^\tau_\nu F_{\tau\sigma} = -\lambda\Omega_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{90}$$

Daraus ergibt sich:

$$q_{\delta\beta} = \dot{\omega}_{\beta\|\delta} - \dot{\omega}_\delta \dot{\omega}_\beta = -\lambda E_{\beta\|\delta} - \lambda^2 E_\beta E_\delta, \qquad \chi_{\mu\nu} = \lambda\Theta_{\mu\nu} - \lambda\Omega_{\mu\nu} = \lambda\psi_{\nu\mu}.$$

Berücksichtigt man nun dies beim Einsetzen von (84) und (89) in (83), so findet man:

$$\begin{aligned}
R_{\beta\delta} &= \widetilde{R}_{\beta\delta} + \lambda\dot{\psi}_{\beta\delta} + \lambda E_\alpha(2\psi^{\alpha}_{\bullet(\delta} + E^{\alpha}_{\bullet}\omega_{(\delta)})\omega_{\beta)} + 2\omega_{(\delta}\psi^{\alpha}_{\bullet\beta)\|\alpha} + \omega_\beta\omega_\delta E^{\alpha}_{\bullet\|\alpha} + \lambda\vartheta\,\psi_{\beta\delta} \\
&\qquad - \lambda 2(\psi_{\mu(\beta} + E_\mu\omega_{(\beta)})\psi_{\delta)}{}^{\mu}_{\bullet} + 2(\Omega^2 - \Theta^2)\omega_\beta\omega_\delta \\
&\qquad - \dot{\vartheta}\omega_\beta\omega_\delta - 2\vartheta_{\|(\beta}\omega_{\delta)} - \lambda E_{\beta\|\delta} - \lambda^2 E_\beta E_\delta \\
&= \widetilde{R}_{\beta\delta} + \lambda(\dot{\psi}_{\beta\delta} + \vartheta\psi_{\beta\delta} - 2\psi_{\mu(\beta}\psi_{\delta)}{}^{\mu}_{\bullet} - E_{\beta\|\delta}) - \lambda^2 E_\beta E_\delta \\
&\qquad + 2\omega_{(\beta}\big(\psi^{\alpha}_{\bullet\delta)\|\alpha} - \vartheta_{\|\delta)} + \lambda(\psi^{\eta}_{\bullet\delta)} - \psi_{\delta)}{}^{\eta}_{\bullet})E_\eta\big) \\
&\qquad + \big(E^{\alpha}_{\bullet\|\alpha} + \lambda E^2 + 2(\Omega^2 - \Theta^2) - \dot{\vartheta}\big)\omega_\beta\omega_\delta.
\end{aligned}$$

Der antisymmetrische Teil dieser Gleichung schreibt sich mit $R_{[\mu\nu]} = 0$, $\dot{\Omega}_{\mu\nu} = E_{[\mu\|\nu]}$ (aus (74)) und $\lambda\Omega_{\mu\nu} = -\chi_{[\mu\nu]}$ als:

$$\widetilde{R}_{[\mu\nu]} = \vartheta\,\chi_{[\mu\nu]}. \tag{91}$$

Der symmetrische Anteil schließlich verwandelt sich durch (88) in die Aussage dieses Lemmas. ■

Satz 4. *Die Axiome 1–4 sollen gelten. Ferner sei ein zeitartiges normiertes Vektorfeld B auf M gegeben, mit dessen Hilfe man die Metriken und den Zusammenhang zerlegt. Ich definiere:*

$$\begin{aligned}
&\varrho := T^{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu, \qquad j^\alpha := \pi^{\alpha}_{\mu}T^{\mu\nu}\omega_\nu, \qquad S^{\alpha\beta} := \pi^{\alpha}_{\mu}\pi^{\beta}_{\nu}T^{\mu\nu}, \\
\Longrightarrow\ & T^{\alpha\beta} = \varrho B^\alpha B^\beta + 2B^{(\alpha}j^{\beta)} + S^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{92}$$

Es gilt:

(a) Die Feldgleichungen (Axiom 5(b)) sind genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
E^{\sigma}_{\bullet\|\sigma} + \lambda E^2 + 2(\Omega^2 - \Theta^2) - \dot{\vartheta} &= 4\pi G(\varrho + \lambda\gamma_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau}), \\
(\Theta^{\sigma}_{\bullet\mu} + \Omega^{\sigma}_{\bullet\mu})_{\|\sigma} - \vartheta_{\|\mu} + 2\lambda E^{\tau}_{\bullet}\Omega_{\tau\mu} &= -8\pi G\lambda\,\gamma_{\mu\nu}j^\nu, \\
\widetilde{R}_{(\mu\nu)} + \lambda\big(\dot{\Theta}_{\mu\nu} + \vartheta\Theta_{\mu\nu} + 2(\Omega_{\eta\mu}\Omega^{\eta}_{\bullet\nu} - \Theta_{\eta\mu}\Theta^{\eta}_{\bullet\nu}) - E_{(\mu\|\nu)}\big) - \lambda^2 E_\mu E_\nu & \\
= 4\pi G\lambda\big(\varrho\gamma_{\mu\nu} + \lambda(2\gamma_{\mu\sigma}\gamma_{\nu\tau}S^{\sigma\tau} - \gamma_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau}\gamma_{\mu\nu})\big), &
\end{aligned} \tag{93}$$

(b) Die Bewegungsgleichungen (Axiom 5(a)) sind genau dann erfüllt, wenn:

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{\varrho} + \vartheta\varrho + j^{\mu}{}_{\|\mu} + \lambda(2j^\mu E_\mu + \Theta_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau}), \\
0 &= \pi^{\alpha}_{\mu}(\mathcal{L}_B j)^\mu + \vartheta j^\alpha + S^{\alpha\beta}{}_{\|\beta} + \varrho E^{\alpha}_{\bullet} + 2(\Theta^{\alpha}_{\bullet\beta} + \Omega^{\alpha}_{\bullet\beta})j^\beta + \lambda S^{\alpha\beta}E_\beta.
\end{aligned} \tag{94}$$

Bei $\lambda \neq 0$ und wenn die Metriken zumindest C^3 sind, ist bekanntlich (94) eine Folge von (93) und (75).

Beweis: Mit

$$\begin{aligned} T^{\sigma\bullet}_{\ \ \sigma} &= \varrho B^\sigma \omega_\sigma + S^{\sigma\bullet}_{\ \ \sigma} = \varrho - \lambda\gamma_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau}, \\ T^{\bullet\bullet}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}T^{\sigma\bullet}_{\ \ \sigma}g_{\mu\nu} &= \varrho\,\omega_\mu\omega_\nu + 2\omega_{(\mu}j^\bullet_{\nu)} + S^{\bullet\bullet}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(\varrho - \lambda\gamma_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau})(\omega_\mu\omega_\nu - \lambda\gamma_{\mu\nu}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\varrho + \lambda\gamma_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau})\omega_\mu\omega_\nu - 2\lambda\gamma_{\sigma(\mu}\omega_{\nu)}j^\sigma \\ &\qquad + \lambda^2\gamma_{\mu\sigma}\gamma_{\nu\tau}S^{\sigma\tau} + \tfrac{1}{2}\lambda(\varrho - \lambda\gamma_{\sigma\tau}S^{\sigma\tau})\gamma_{\mu\nu} \end{aligned}$$

und Lemma 7 erhält man die Gleichungen (93) durch Einsetzen in Axiom 5(b). Aus Axiom 5(a) wird beim Zerlegen:

$$\begin{aligned} 0 &= T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \\ &\underset{(59)}{=} T^{\alpha\beta}{}_{\|\beta} + (\mathcal{L}_B T)^{\alpha\beta}\omega_\beta + B^\alpha(\omega_\mu T^{\mu\beta})_{\|\beta} + \Delta^\alpha_{\beta\mu}T^{\mu\beta} + \Delta^\beta_{\beta\nu}T^{\alpha\nu} \\ &= S^{\alpha\beta}{}_{\|\beta} + \mathcal{L}_B(\varrho B^\alpha + j^\alpha) - (B^\alpha j^\beta + S^{\alpha\beta})\dot\omega_\beta + B^\alpha j^\beta{}_{\|\beta} \\ &\qquad + \big(h^{\alpha\sigma}(2\Theta_{\sigma(\beta}\,\omega_{\mu)} - \Theta_{\beta\mu}\omega_\sigma) + 2k^{\alpha\sigma}F_{\sigma(\beta}\,\omega_{\mu)}\big)T^{\mu\beta} + \vartheta(\varrho B^\alpha + j^\alpha) \\ &= B^\alpha\big(\dot\varrho + \omega_\mu(\mathcal{L}_B j)^\mu - j^\beta\dot\omega_\beta + j^\beta{}_{\|\beta} + \lambda\Theta_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + \vartheta\varrho\big) \\ &\qquad + S^{\alpha\beta}{}_{\|\beta} + \pi^\alpha_\mu(\mathcal{L}_B j)^\mu + \lambda S^{\alpha\beta}E_\beta + 2k^{\alpha\sigma}(\Theta_{\sigma\beta} + F_{\sigma\beta})(\varrho B^\beta + j^\beta) + \vartheta j^\alpha \\ &= B^\alpha(\dot\varrho + \vartheta\varrho + j^\beta{}_{\|\beta} + 2\lambda j^\beta E_\beta + \lambda\Theta_{\mu\nu}S^{\mu\nu}) \\ &\qquad + \pi^\alpha_\mu(\mathcal{L}_B j)^\mu + \vartheta j^\alpha + S^{\alpha\beta}{}_{\|\beta} + \varrho E^\alpha_\bullet + \lambda S^{\alpha\beta}E_\beta + 2(\Theta^\alpha_{\bullet\beta} + \Omega^\alpha_{\bullet\beta})j^\beta. \ \blacksquare \end{aligned}$$

2.3. Der Fall $\lambda = 0$

Gegeben sei eine Lösung der Rahmentheorie mit $\lambda = 0$. Ich wähle ein Beobachterfeld B mit $g(B,B) = 1$ und konstruiere dazu die 1-Form $\omega_\mu = B^\bullet_\mu$ und die 3-dimensionale Metrik $\gamma_{\mu\nu}$. Lemma 2 besagt dann unter anderem, daß die Zeitmetrik von der Form

$$g_{\mu\nu} = \omega_\mu\omega_\nu$$

ist. Mit Satz 3 findet man, daß ω geschlossen und somit lokal der Gradient einer skalaren Funktion t ist:

$$\omega_\mu = t_{,\mu}.$$

Aus der Interpretation der Zeitmetrik folgt, daß t aufzufassen ist als eine Beobachter-unabhängige Zeitkoordinate („absolute Zeit“). Sie ist bestimmt bis auf das Vorzeichen und eine additive Konstante. Satz 3 ergibt ferner, daß die Hyperflächen $t = const.$ total geodätisch sind:

$$\chi_{\mu\nu} = 0.$$

Aus $dF = 0$ wird:

$$\dot{\Omega}_{\mu\nu} = E_{[\mu\|\nu]}, \qquad \Omega_{[\mu\nu\|\sigma]} = 0.$$

Und Satz 4 beschert uns die Gleichungen:

$$\begin{array}{lcl} E^{\sigma}_{\bullet\|\sigma} + 2(\Omega^2 - \Theta^2) - \dot{\vartheta} & = & 4\pi G\varrho, \\ (\Theta^{\sigma}_{\bullet\mu} + \Omega^{\sigma}_{\bullet\mu})_{\|\sigma} - \vartheta_{\|\mu} & = & 0, \\ \widetilde{R}_{\mu\nu} & = & 0. \end{array}$$

Weil $\widetilde{\nabla}$ bei $\lambda = 0$ eine kovariante Ableitung in den Hyperflächen $t = const.$ ist, handelt es sich bei $\widetilde{R}_{\mu\nu}$ wirklich um einen Ricci-Tensor. Auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit impliziert das Verschwinden des Ricci-Tensors aber bereits, daß der Riemann-Tensor zu Null wird. Die Schichten konstanter Zeit sind also auch intrinsisch lokal flach und damit Euklidisch.

Man kann nun speziell ein Beobachterfeld konstruieren, für das $\Theta_{\mu\nu} = 0$ gilt („starrer Beobachter"). Dazu gibt man sich eine beliebige zeitartige Kurve $c^{\mu}(t)$ vor und wählt an einer Stelle drei Basisvektoren für die Raumrichtungen. Diese verschiebt man parallel längs der Kurve (dabei bleiben sie in den Zeitschichten) und konstruiert in jeder Schicht Normalkoordinaten zu diesen Vektoren. Weil die Flächen $t = const.$ aber lokal flach sind und die Winkel und Längen der drei Vektoren bei Parallelverschiebung erhalten bleiben, findet man, daß die Komponenten der Raummetrik $\gamma_{\mu\nu}$ in diesen Koordinaten konstant sind. Definiert man nun $B := \frac{\partial}{\partial t}$, so folgt insbesondere:

$$\Theta_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}_{\mu\nu} = 0.$$

Wählt man die drei Basisvektoren orthonormiert, so gelangt man zu einem räumlich kartesischen Koordinatensystem (t, x^i) („Galilei-Koordinaten"). Mit

$$\vec{g} := -(E_1, E_2, E_3), \qquad \vec{\Omega} := -(\Omega_{23}, \Omega_{31}, \Omega_{12})$$

erhält man darin insgesamt die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \dot{\vec{\Omega}} = -\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{g}, \qquad \operatorname{div}\vec{\Omega} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{g} = 2\Omega^2 - 4\pi G\varrho, \qquad \operatorname{rot}\vec{\Omega} = \vec{0}, \\ \dot{\varrho} + \operatorname{div}\vec{\jmath} = 0, \qquad \dot{\vec{\jmath}} + \operatorname{Div} S = \varrho\vec{g} + 2\,\vec{\jmath} \times \vec{\Omega}. \end{array} \tag{95}$$

(Dabei soll $(\operatorname{Div} S)^a := S^{ab}{}_{\|b}$ sein. Beachte $\Omega = |\vec{\Omega}|$.) Wie man an der letzten Gleichung sehen kann, beschreibt $\overrightarrow{\Omega}$ ein Coriolisfeld. Dies äußert sich auch in der Gleichung einer zeitartigen normierten Geodätischen $x^\mu(t)$. Die Zusammenhangskomponenten sind:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 2\delta^{\alpha a} F_{a(\beta}\, t_{,\gamma)} = \delta^{\alpha a}(2\Omega_{a(\beta}\, t_{,\gamma)} + E_a t_{,\beta} t_{,\gamma}), \tag{96}$$

so daß für die Geodätische folgt:

$$\dot{x}^0 = \pm 1, \qquad \ddot{\vec{x}} = \vec{g} + 2\,\dot{\vec{x}} \times \overrightarrow{\Omega}.$$

Wenn die Hyperflächen $t = const.$ isometrisch zum Euklidischen $\mathbb{R}^3$ sind, dann erhält man wegen

$$\Delta \overrightarrow{\Omega} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \overrightarrow{\Omega}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \overrightarrow{\Omega}) = \vec{0}$$

aus der zusätzlichen Forderung, daß $\overrightarrow{\Omega}$ in jeder Zeitschicht beschränkt sein soll, die Aussage, daß es nur eine Funktion von t ist. Dadurch, daß die Raumkoordinaten auf einem längs der Kurve $c(t)$ parallel verschobenen Dreibein basieren, gilt aber

$$\Omega_{\mu\nu}|_{c(t)} = 0,$$

so daß $\overrightarrow{\Omega}$ überall verschwindet. Damit ist $\vec{g}$ wirbelfrei und besitzt lokal ein Potential:

$$\vec{g} = -\,\mathrm{grad}\, U.$$

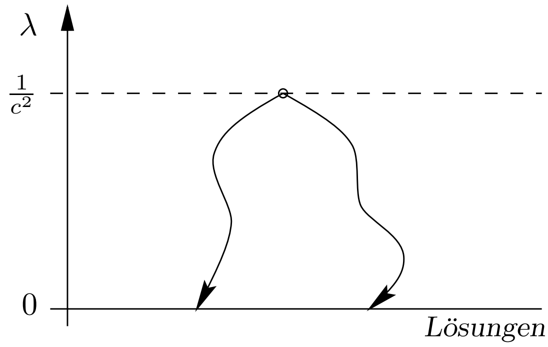
Die dann verbleibenden Gleichungen beschreiben die „echte“ Newtonsche Gravitationstheorie:

$$\Delta U = 4\pi G \varrho, \qquad \dot{\varrho} + \mathrm{div}\, \vec{\jmath} = 0, \qquad \dot{\vec{\jmath}} + \mathrm{Div}\, S = -\varrho\, \mathrm{grad}\, U. \tag{97}$$

Ich werde aber im weiteren die Begriffe „Newtonsch“ und „Newtonsche Gravitationstheorie“ in der Regel mißbrauchen, um den Fall $\lambda = 0$ zu beschreiben. Damit will ich nicht etwa zum Ausdruck bringen, daß Newton meiner Meinung nach ein Coriolisfeld in seine Theorie hätte aufnehmen sollen. Mir fehlt einfach nur eine angemessene und prägnante Bezeichnung für „Rahmentheorie bei $\lambda = 0$“.

Es ist vielleicht auch noch erwähnenswert, daß man das Verschwinden des Coriolisfeldes auch aus lokalen Bedingungen an den Krümmungstensor erhalten kann (siehe Ehlers [1]). Keine von diesen ist aber dergestalt, daß man sie als λ-unabhängig gültige Forderung unter die Axiome aufnehmen kann, ohne die AR einzuschränken. Es ist jedoch zu erwarten, daß eine geeignete Definition von „asymptotisch flach“ im Newtonschen Grenzwert übergehen wird in die Forderung, daß $\overrightarrow{\Omega}$ in jeder Zeitschicht beschränkt sein soll, so daß man das Coriolisfeld auf die oben beschriebene Art loswerden kann.

3. Der Newtonsche Grenzwert



Sei nun eine relativistische Lösung der Rahmentheorie gegeben, das heißt ein mathematisches Modell $(M, g_{\mu\nu}, h^{\alpha\beta}, \Gamma^{\eta}_{\sigma\tau}, T^{\alpha\beta}, c^{-2}, G)$. Was ist sein Newtonscher Grenzwert? Die Antwort lautet: dies ist die falsche Frage, denn *den* Newtonschen Grenzwert gibt es nicht. Niemand kann mir vorschreiben, auf welchem Weg ich in der Menge aller Lösungen der Rahmentheorie von der relativistischen zu einer Newtonschen Lösung gehen soll. Natürlich sind manche Pfade sinnvoller als andere. Zum Beispiel ist nicht einzusehen, warum man ausgehend von der Schwarzschild-Metrik einen Weg wählen sollte, in dem nicht jede Lösung statisch, kugelsymmetrisch und materiefrei ist. Aber selbst dann ist der Newtonsche Grenzwert nicht eindeutig! Man kann nämlich

— einen gegebenen Weg dadurch abändern, daß man von den Träger-Mannigfaltigkeiten der Lösungen Teile entfernt oder an sie Erweiterungen anschließt, und
— man hat die Freiheit, für die Masse $m(\lambda)$ eine beliebige stetige Funktion vorzugeben.

Sie, geneigter Leser, glauben jetzt vielleicht, daß man durch Hinzufügen weiterer Bedingungen (z. B. Festlegen auf den vollständigen Bereich außerhalb des Schwarzschild-Radius, konstante Masse) die Eindeutigkeit des Grenzwertes erzwingen kann. Das ist — bedauerlicherweise — *falsch!* Der Grund liegt darin, daß man zum Bilden des Grenzwertes ein Koordinatensystem braucht. Neben den offensichtlichen, d. h. an die Symmetrie angepaßten, kann man dafür aber z. B. eines wählen, in dem der Abstand zwischen Ursprung und Horizont bei $\lambda \to 0$ über alle Grenzen wächst. Im Grenzwert ist dann das schwarze Loch im Unendlichen verschwunden, und man bekommt den Feld-freien Euklidischen Raum, während man im anderen System einen Massenpunkt erhält (siehe J. Ehlers [1], Satz 9).

Im allgemeinen Fall hat man nicht einmal die bei der Schwarzschild-Metrik möglichen Einschränkungen an den λ-Weg zur Verfügung. Daher kommt man um die Schlußfolgerung nicht herum, daß die relativistische Lösung allein nicht ausreichend ist, um einen Newtonschen Grenzwert festzulegen. Folglich nehme ich in diesem Abschnitt an, daß bereits eine einparametrige Schar $\big(M_\lambda, g_{\mu\nu}(\lambda), h^{\alpha\beta}(\lambda), \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(\lambda), T^{\sigma\tau}(\lambda), \lambda, G\big)$ von Lösungen der Rahmentheorie vorgegeben ist. Es sollen drei Punkte geklärt werden:

(a) was bedeutet es mathematisch, daß diese Schar einen Grenzwert für $\lambda \to 0$ besitzt?
(b) Wann ist dieser Grenzwert eine Lösung der Rahmentheorie für $\lambda = 0$?
(c) Was für eine physikalische Vorstellung hat man mit dem Bilden des Grenzwertes zu verbinden?

3.1. Der Grenzwert von Raumzeiten in der Formulierung von R. Geroch

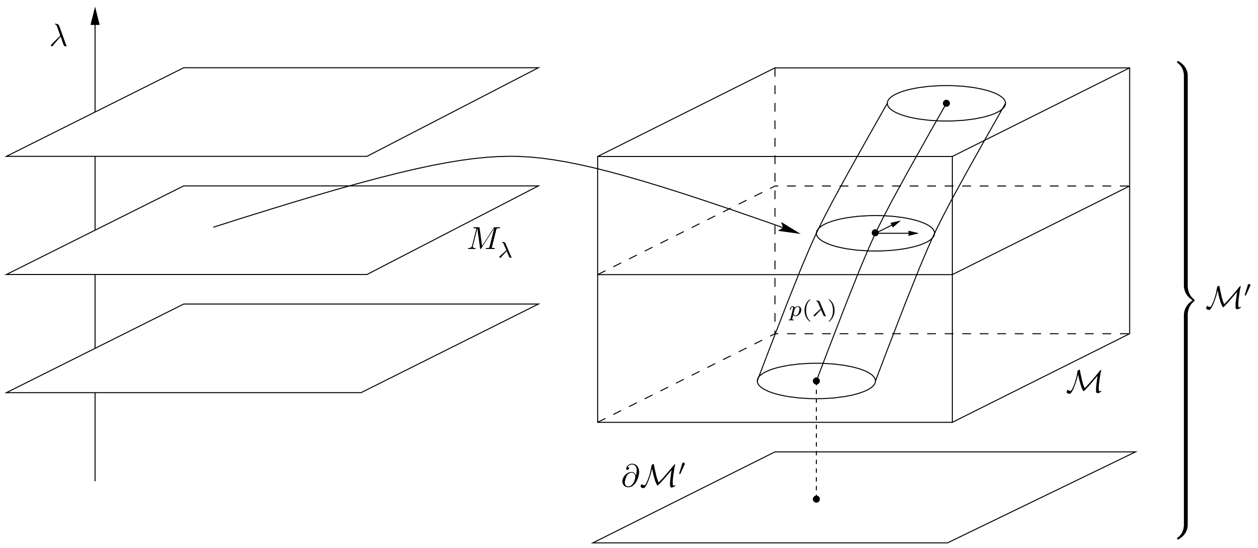
In diesem Abschnitt will ich kurz die Gerochsche Auffassung [6] vom Grenzwert einer Familie von Raumzeiten der AR vorstellen, damit man sieht, in wieweit ich mich im folgenden auf einen Spezialfall beschränken werde.

Geroch geht aus von einer parametrisierten Familie $\big(M_\lambda, g^{\mu\nu}(\lambda)\big)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ von Lösungen der Einsteinschen Vakuumgleichungen (die Mannigfaltigkeiten M_λ werden als glatt (C^∞), Hausdorffsch (T_2) und zusammenhängend vorausgesetzt). Die Familie bettet er ein in eine 5-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ (C^∞, T_2, zusammenhängend), und zwar so, daß

(a) ein glattes $\Lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ existiert, $d\Lambda \neq 0$, dessen Niveauflächen die eingebetteten M_λ sind, und
(b) die induzierte Metrik g^{AB} (A, $B = 0, 1, \dots, 4$) glatt ist.

Im allgemeinen ist eine solche Einbettung nicht eindeutig. Geroch definiert dann einen „Grenzraum" (limit space) als ein Tupel $(\mathcal{M}', \acute{g}^{AB}, \Lambda')$ mit den Eigenschaften:

(1) $\mathcal{M}'$ ist eine 5-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand (C^∞, zusammenhängend). Der Rand $\partial\mathcal{M}'$ ist zusammenhängend, T_2 und nicht leer.
(2) $\acute{g}^{AB}$ ist symmetrisch, glatt und auf $\partial\mathcal{M}'$ vom Rang 4. $\Lambda' : \mathcal{M}' \to \mathbb{R}$ ist glatt, $d\Lambda' \neq 0$, und der Rand ist die Fläche $\Lambda' = 0$.
(3) Es gibt eine Isometrie $\Psi : (\mathcal{M}, g^{AB}) \to (\mathring{\mathcal{M}}', \acute{g}^{AB})$ mit der Eigenschaft $\Lambda = \Lambda' \circ \Psi$. ($\mathring{\mathcal{M}}'$ ist der randlose Teil von $\mathcal{M}'$.)



Der Rand $(\partial\mathcal{M}', \acute{g}^{AB}|_{\partial\mathcal{M}'})$ des Grenzraumes läßt sich auffassen als ein Grenzwert der Familie $\big(M_\lambda, g^{\mu\nu}(\lambda)\big)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ für $\lambda \to 0$. Dieser Grenzwert ist nicht schon durch $\mathcal{M}$ fixiert, aber Geroch zeigte, daß es zu jedem Grenzraum $\mathcal{M}'$ einen eindeutig bestimmten maximalen Grenzraum $\mathcal{M}''$ gibt, d.h.: hat man erst einmal ein Stück des Randes $\partial\mathcal{M}'$, dann ist der Grenzwert eindeutig festgelegt, nämlich als Rand $\partial\mathcal{M}''$ der maximalen Erweiterung.

Wie bekommt man aber ein Randstück? Angenommen, man hätte bereits einen Rand $\partial\mathcal{M}'$. Dann existiert eine durch $\lambda \geq 0$ parametrisierte glatte Kurve $p(\lambda)$, die auf diesem Randstück endet, und eine glatte Familie von orthonormalen Basisvektoren $w(\lambda)$ längs der Kurve. Für jedes λ (einschließlich $\lambda = 0$) gibt es eine auf $w(\lambda)$ basierende Normalenumgebung von $p(\lambda)$. Damit erhält man um die Kurve herum nahe $\lambda = 0$ einen Koordinaten-Schlauch, d.h. eine Karte, deren Wertebereich von der Form $N \times [0, \lambda_0)$ ist, mit einem offenen zusammenhängenden $N \subset \mathbb{R}^4$, das den Ursprung enthält (natürlich soll $x^4 = \Lambda$ sein). Selbstverständlich existieren in diesem Koordinatensystem die Grenzwerte der Komponenten des metrischen Tensors für $\lambda \to 0$ und sind gleich den Werten auf dem Rand.

Das läßt sich nun umkehren. Man wählt bei vorgegebenem $\mathcal{M}$ eine Kurve $p(\lambda)$ $(\lambda > 0)$, eine Familie von orthonormierten Basisvektoren $w(\lambda)$ längs der Kurve, und führt darauf basierend um die Kurve herum Normalkoordinaten ein. Darin betrachtet man sodann die Grenzwerte der metrischen Komponenten für $\lambda \to 0$: existieren sie und bilden sie eine Matrix vom Rang 4, dann *definiert* man diese Werte als die von $\acute{g}^{AB}$ auf dem Rand. Divergieren die Komponenten aber oder wird die Metrik im Grenzwert ausgeartet, dann muß man sich eine neue Kurve oder neue Basisvektoren suchen.

Das Randstück, das man auf diese Weise findet, besteht als Mannigfaltigkeit aus einer offenen zusammenhängenden Teilmenge des $\mathbb{R}^4$, nämlich einer, die für jedes hinreichend kleine λ im Wertebereich der Normalkoordinaten um $p(\lambda)$ liegt. Natürlich ist es möglich, daß eine solche Menge nicht existiert, d.h. daß die Normalenumgebungen für $\lambda \to 0$ auf einen Punkt zusammenschrumpfen. Auch dann muß man sich bessere $p(\lambda)$ oder $w(\lambda)$ suchen.

Mit der Einführung eines Koordinatenschlauches ist verbunden eine Identifizierung von Punkten aus verschiedenen Mannigfaltigkeiten der Familie. Eigentlich konstruiert man eine Kongruenz mit λ als Kurvenparameter, die zwei Punkte $x \in M_\lambda$, $y \in M_{\lambda'}$ genau dann miteinander identifiziert, wenn die durch x verlaufende Kurve auch y berührt. Mit dieser Beobachtung kann man das Konstruieren des Grenzwertes logisch in drei Schritte zerlegen:

(1) Konstruktion eines Koordinatenschlauches K mit dem Wertebereich $N \times (0, \lambda_0)$.
(2) Übertragen sämtlicher Felder auf K in λ-abhängige Felder auf N durch Punkt-Identifikation.
(3) Punktweises Bilden des Grenzwertes der Felder in irgendeiner Karte auf N.

Auf diese Weise gelangt man von einer Familie $\big(M_\lambda, g^{\mu\nu}(\lambda)\big)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ von Mannigfaltigkeiten und Feldern zu einer Familie $\big(g^{\mu\nu}(\lambda)\big)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ von Feldern auf *einer* Mannigfaltigkeit, nämlich N.

„Eichtransformationen“, d.h. Koordinatentransformationen, die vom Parameter λ abhängen, äußern sich in diesem Bild als Verschiebungen oder Verdrehungen des Koordinatenschlauches, also als geänderte Punkt-Identifizierungen. Auf diese Weise kann man meist auch den Grenzwert verändern, auf jeden Fall aber Nicht-Existenz herbeiführen. Hat man jedoch erst einmal sämtliche Felder auf eine Mannigfaltigkeit (den zukünftigen Rand) geholt, dann sind Eichtransformationen nicht mehr möglich, und der Grenzwert ist eindeutig festgelegt (eventuell als nicht-existent).

Die Überschrift „Existenz des Grenzwertes" kann nun zwei verschiedene Themen bezeichnen: einmal die Frage, ob es überhaupt einen Koordinatenschlauch gibt, in dem die Felder Grenzwerte besitzen, oder aber, ob die Felder in einem vorgegebenen Schlauch Grenzwerte haben oder nicht. Im ersten Fall braucht man die Gerochsche Formulierung, im zweiten nicht. Die erste Frage scheint mir die schwierigere (und sie ist meines Wissens bisher ungelöst), die zweite ist aber nach den eben angestellten Betrachtungen glücklicherweise sowieso zuerst zu behandeln. Daher werde ich mich für die Rahmentheorie im folgenden auf die Situation λ-abhängiger Felder auf einer einzigen Mannigfaltigkeit beschränken.

3.2. Definition und Existenz des Newtonschen Grenzwertes

Definition 1. *Sei I ein 0 enthaltendes Intervall von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $\Lambda := I - \{0\}$ offen ist. Gegeben sei auf einer Mannigfaltigkeit M eine durch $\lambda \in \Lambda$ parametrisierte Schar $\big(g_{\mu\nu}(\lambda), h^{\alpha\beta}(\lambda), \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(\lambda), T^{\alpha\beta}(\lambda), \lambda, G\big)$ von Lösungen der Rahmentheorie.*

Diese Familie <u>hat einen Newtonschen Grenzwert</u>, falls gilt:

- *(a) Alle Felder und dazu der Krümmungstensor besitzen für $\lambda \to 0$ Grenzwerte in jedem $p \in M$. Der Grenzwert des Krümmungstensors ist gleich dem Krümmungstensor zum Grenzwert des Zusammenhanges.*
- *(b) Die Grenzfelder $(\underset{0}{g}_{\mu\nu}, \underset{0}{h}^{\alpha\beta}, \underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}, \underset{0}{T}{}^{\alpha\beta})$ erfüllen die Axiome der Rahmentheorie für $\lambda = 0$ und den gegebenen Wert von G.*

Zunächst betrachte man nur die metrischen Felder. Angenommen sie erfüllen die metrischen Axiome für jedes $\lambda \in \Lambda$, wann erfüllen dann die Grenzfelder dieselben Axiome für $\lambda = 0$?

Lemma 1 (Grenzwert der Metriken). *Voraussetzungen wie in der Definition 1. Die Metriken seien* C^k *mit* $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) *Die Felder* $g_{\mu\nu}(\lambda)$, $h^{\alpha\beta}(\lambda)$ *haben für* $\lambda \to 0$ C^k*-Grenzwerte* $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$, $\underset{0}{h}^{\alpha\beta}$, *und diese erfüllen die metrischen Axiome für* $\lambda = 0$.

(b) *Es gibt zu jedem* $p \in M$ *ein* $G \subset M \times I$ *und darauf Vektor- bzw. Kovektorfelder* $E_{(\mu)}$, $E^{(\nu)}$ *mit den Eigenschaften:*

(b1) $(p, 0)$ *gehört zu* G. *Die Schnitte konstanten Lambdas durch* G *sind offen in* M. *Ferner gibt es zu jedem* $(q, 0) \in G$ *ein* $\varepsilon_q \in \mathbb{R}^+$ *dergestalt, daß für alle* $|\lambda| < \varepsilon_q$ *der Punkt* (q, λ) *zu* G *gehört.*

(b2) *Die* $E_{(\mu)}$, $E^{(\nu)}$ *sind zueinander duale* C^k*-Basisfelder.*

(b3) *Es gilt auf* G*:*

$$\left(g_{(\mu\nu)}\right) = \mathrm{diag}(1, -\lambda, -\lambda, -\lambda), \qquad \left(h^{(\alpha\beta)}\right) = \mathrm{diag}(-\lambda, 1, 1, 1).$$

(b4) *In jedem* $q \in M$ *mit* $(q, 0) \in G$ *gilt:*

$$\lim_{\lambda \to 0} E_{(\mu)} \;\exists\!= E_{(\mu)}|_{\lambda=0}, \qquad \lim_{\lambda \to 0} E^{(\nu)} \;\exists\!= E^{(\nu)}|_{\lambda=0}.$$

(Dabei sei „$\exists\!=$“ zu lesen als „existiert und ist gleich“.)

(c) (c1) $h^{\alpha\beta}(\lambda)$ *hat einen* C^k*-Grenzwert* $\underset{0}{h}^{\alpha\beta}$. *Dieser ist positiv semidefinit und vom Rang 3.*

(c2) $\lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{1}{\lambda} \det(h^{\alpha\beta})\right) \;\exists\!< 0$ *und ist* C^k.

Man beachte, daß die Bedingung (c2) trotz der Verwendung der Determinante vom Koordinatensystem unabhängig ist.

Beweis: Sei (a) gegeben. Nach dem Satz 2.2 existiert dann zu jedem $p \in M$ eine offene Teilmenge U von M, $p \in U$, und darauf C^k-Basisfelder $\underset{0}{E}_{(\mu)}$, $\underset{0}{E}^{(\nu)}$, in denen

$$\left(\underset{0}{g}_{(\mu\nu)}\right) = \mathrm{diag}(1, 0, 0, 0), \qquad \left(\underset{0}{h}^{(\alpha\beta)}\right) = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 1)$$

gilt. Es sei:

$$G := \left\{ (q, \lambda) \in U \times I \;\middle|\; g_\lambda(\underset{0}{E}_{(0)}, \underset{0}{E}_{(0)}) > 0 \text{ in } q \right\}.$$

G hat die geforderte Eigenschaft (b1), denn

— bei festem λ ist $g_{\mu\nu}$ stetig in den Koordinaten, und

— bei festem $p \in U$ konvergiert $g(\underset{0}{E}_{(0)}, \underset{0}{E}_{(0)})$ nach Voraussetzung gegen $\underset{0}{g}_{(00)} = 1 > 0$.

Führt man nun mit den Basisfeldern das Orthonormierungsverfahren wie in Lemma 2.1 durch, so erhält man zueinander duale Felder $E_{(\mu)}$, $E^{(\nu)}$ auf G mit der Eigenschaft (b3). Sie sind gebildet als Linearkombinationen der $\underset{0}{E}_{(\mu)}$, bzw. $\underset{0}{E}^{(\nu)}$ mit Koeffizienten, die analytisch sind in den Metriken und den $\underset{0}{E}_{(\mu)}$ und $\underset{0}{E}^{(\nu)}$ (das gibt die Differenzierbarkeit in (b2)) mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß ihre λ-Grenzwerte existieren (es wird nur durch Terme dividiert, die bei $\lambda \to 0$ gegen 1 konvergieren) und gleich den $\underset{0}{E}{}_{(\mu)}$ bzw. $\underset{0}{E}{}^{(\nu)}$ sind; und damit hat man auch (b4).

Wenn (b) gegeben ist, so kann man (c1) direkt ablesen aus (b2–b4). Ferner folgt:

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\tfrac{1}{\lambda}\det(h^{\alpha\beta})\right) = \lim_{\lambda\to 0}\left(\tfrac{1}{\lambda}\det(E_{(\mu)}{}^{\sigma})^2\det(h^{(\mu\nu)})\right) \exists\!= -\det(\underset{0}{E}{}_{(\tau)}{}^{\sigma})^2 < 0,$$

und das ergibt (c2).

Schließlich sei (c) vorausgesetzt. Dann existieren lokal C^k-Basiskovektorfelder $\underset{0}{E}{}^{(\mu)}$ mit $\big(\underset{0}{h}{}^{(\alpha\beta)}\big) = \operatorname{diag}(0,1,1,1)$. Aus $g_{\mu\nu}h^{\nu\sigma} = -\lambda\,\delta^{\sigma}_{\mu}$ folgt bei $\lambda \neq 0$ aber, daß in der Basis der $\underset{0}{E}{}^{(\nu)}$ gilt:

$$\begin{aligned}(g_{(\mu\nu)}) &= \left(-\frac{1}{\lambda}h^{(\alpha\beta)}\right)^{-1} = \frac{1}{\det(-\frac{1}{\lambda}h^{(\sigma\tau)})}\operatorname{adj}\left(-\frac{1}{\lambda}h^{(\alpha\beta)}\right)\\ &= -\frac{\lambda}{\det(h^{(\sigma\tau)})}\operatorname{adj}(h^{(\alpha\beta)}) = -\frac{\lambda\det(\underset{0}{E}{}_{(\mu)}{}^{\nu})^2}{\det(h^{\sigma\tau})}\operatorname{adj}(h^{(\alpha\beta)}),\end{aligned}$$

und dies hat nach Voraussetzung einen Grenzwert, so daß auch der Grenzwert von $g_{\mu\nu}(\lambda)$ existiert. Es folgt:

$$\lim_{\lambda\to 0}(g_{(\mu\nu)}) \exists\!= \operatorname{diag}(a,0,0,0) \qquad \text{mit } a := -\lim_{\lambda\to 0}\left(\lambda/\det(h^{(\sigma\tau)})\right) > 0,$$

so daß man durch Strecken von $\underset{0}{E}{}_{(0)}$ eine Tetrade erhalten kann, mit der man aus Satz 2.2 auf die Gültigkeit der metrischen Axiome schließen kann. ∎

Lemma 2 (Grenzwert des Zusammenhanges). *Voraussetzungen wie in der Definition 1. Die Metriken $g_{\mu\nu}(\lambda)$, $h^{\alpha\beta}(\lambda)$ seien C^k, $k \in \overline{\mathbb{N}}$, und mögen Newtonsche Grenzwerte besitzen, die ebenfalls C^k sind. Der Zusammenhang $\Gamma^{\eta}_{\sigma\tau}(\lambda)$ sei C^{k-1}. Ich definiere $\mathcal{B}_1$ als die Menge aller Vektorfelder B mit den Eigenschaften:*

- *Der Definitionsbereich* $\operatorname{Def} B$ *von B ist eine Teilmenge von $M \times I$, deren λ-Schnitte offen in M sind, und für die bei jedem $p \in M$ mit $(p,0) \in \operatorname{Def} B$ ein $\varepsilon_p \in \mathbb{R}^+$ existiert dergestalt, daß alle (p,λ) mit $|\lambda| < \varepsilon_p$ zu* $\operatorname{Def} B$ *gehören.*
- *B ist bei festem λ ein C^k-Vektorfeld mit $g(B,B) = 1$. In jedem p mit $(p,0) \in$* $\operatorname{Def} B$ *gilt:*

$$\lim_{\lambda\to 0} B \exists\!= B|_{\lambda=0}, \qquad \lim_{\lambda\to 0} B^{\alpha}{}_{,\beta} \exists\!= (B|_{\lambda=0})^{\alpha}{}_{,\beta}.$$

$\mathcal{B}_1$ beschreibt also lokale Beobachterfelder, die selber Newtonsche Grenzwerte haben.

Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(a) Der Zusammenhang $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(\lambda)$ hat einen C^{k-1}-Grenzwert $\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, und dieser erfüllt das erste Zusammenhangsaxiom (Axiom 4(a)) für $\underset{0}{g}{}_{\mu\nu}$ und $\underset{0}{h}{}^{\alpha\beta}$.

(b) *Es gilt:*

$$\lim_{\lambda\to 0}(g_{\mu\nu,\sigma}) \,\exists\!= (\lim_{\lambda\to 0} g_{\mu\nu})_{,\sigma}, \qquad \lim_{\lambda\to 0}(h^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}) \,\exists\!= (\lim_{\lambda\to 0} h^{\alpha\beta})_{,\sigma}, \tag{1}$$

und für alle $B \in \mathcal{B}_1$ gilt in jedem $p \in M$ mit $(p,0) \in \mathrm{Def}\, B$:

$$\lim_{\lambda\to 0}(\tfrac{1}{\lambda}\, B^{\bullet}_{[\mu,\nu]}) \,\exists \quad \textit{und ist } C^{k-1}. \tag{2}$$

(c) *Es gilt (1), und zu jedem $p \in M$ existiert ein $B \in \mathcal{B}_1$ mit $(p,0) \in \mathrm{Def}\, B$ und der Eigenschaft (2).*

Beweis: Sei (a) gegeben. Es gilt:

$$\left.\begin{array}{lcl} g_{\mu\nu;\sigma} = 0 & \Longleftrightarrow & g_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma^{\eta}_{\sigma\mu} g_{\eta\nu} + \Gamma^{\eta}_{\sigma\nu} g_{\mu\eta} \\ \underset{0}{g}_{\mu\nu;\sigma} = 0 & \Longleftrightarrow & \underset{0}{g}_{\mu\nu,\sigma} = \underset{0}{\Gamma}{}^{\eta}_{\sigma\mu} \underset{0}{g}_{\eta\nu} + \underset{0}{\Gamma}{}^{\eta}_{\sigma\nu} \underset{0}{g}_{\mu\eta} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}(g_{\mu\nu,\sigma}) \,\exists\!= \underset{0}{g}_{\mu\nu,\sigma},$$

und genauso für $h^{\alpha\beta}$. (Eigentlich gehört bei „$\underset{0}{g}_{\mu\nu;\sigma}$“ auch noch eine Null unter das Semikolon, aber ich möchte nicht übertreiben.)

Nun wähle man ein beliebiges $B(\lambda) \in \mathcal{B}_1$. Die zugehörige Schar von 3-Metriken $\gamma_{\mu\nu}(\lambda)$ hat dann einen C^k-Grenzwert für $\lambda \to 0$ (dazu konstruiere man zu B eine Tetrade wie im vorigen Lemma und betrachte den Grenzwert in dieser Basis). Aber dann hat auch

$$\tfrac{1}{\lambda}\, B^{\bullet}_{[\nu,\mu]} = F_{\mu\nu} = \gamma_{\eta[\mu}\, B^{\eta}{}_{;\nu]} \qquad \text{(aus 2.51 und 2.72)}$$

einen Grenzwert, und dieser ist C^{k-1}.

Um (c) aus (b) zu folgern, reicht es zu zeigen, daß zu jedem $p \in M$ ein $B \in \mathcal{B}_1$ existiert, für das $(p,0) \in \mathrm{Def}\, B$ gilt. Bis auf $\lim_{\lambda\to 0} B^{\mu}{}_{,\nu} \,\exists\!= B(0)^{\mu}{}_{,\nu}$ ist das bereits ein Teil der Aussage von Lemma 1(b), wenn man $B = E_{(0)}$ setzt. Aber mit (1) erhält man auch den Rest noch dazu, wie man mit einem Blick auf das Orthonormierungsverfahren feststellen kann.

Sei schließlich (c) gegeben. Für beliebiges $p \in M$ existiert dann ein $B \in \mathcal{B}_1$ mit der Eigenschaft (2). Betrachte man nun die Zerlegung von $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(\lambda)$ auf $\mathrm{Def}\, B$ nach Satz 2.3:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Delta^{\alpha}_{(\beta\gamma)} - (2B^{\alpha}{}_{,(\beta}\,\omega_{\gamma)} - B^{\alpha}{}_{,\mu} B^{\mu}\,\omega_{\beta}\omega_{\gamma} - B^{\alpha}\pi^{\mu}_{\beta}\pi^{\nu}_{\gamma}\omega_{(\mu,\nu)}), \\ \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \tfrac{1}{2} k^{\alpha\rho}\pi^{\sigma}_{\beta}\pi^{\tau}_{\gamma}(\gamma_{\rho\sigma,\tau} + \gamma_{\tau\rho,\sigma} - \gamma_{\sigma\tau,\rho}), \\ \Delta^{\alpha}_{(\beta\gamma)} &= \tfrac{1}{2} h^{\alpha\sigma}\big(\dot\gamma_{\sigma\beta}\,\omega_{\gamma} + \dot\gamma_{\gamma\sigma}\,\omega_{\beta} - \dot\gamma_{\beta\gamma}\,\omega_{\sigma}\big) + 2k^{\alpha\sigma} F_{\sigma(\beta}\,\omega_{\gamma)}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Für B^{α}, ω_{μ} und $\gamma_{\mu\nu}$ gilt, daß sie C^k-Felder sind, für $\lambda \to 0$ einen Grenzwert besitzen, der C^k ist, und daß die Grenzwerte der ersten Ableitungen gleich den Ableitungen der Grenzwerte sind. Da nach (2) auch $F_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda} B^{\bullet}_{[\nu,\mu]}$ einen Grenzwert hat und dieser C^{k-1} ist, konvergieren sämtliche Größen in diesen drei Gleichungen und ergeben die entsprechenden Gleichungen für die Felder im Fall $\lambda = 0$. Damit folgert man aus Satz 2.3, daß $\underset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} := \lim_{\lambda\to 0} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ nicht nur existiert, sondern auch das erste der Zusammenhangsaxiome erfüllt. (Streng genommen folgt das nicht aus dem Satz in der angegebenen Form, da er auch Axiom 4(b) beinhaltet, aber ein Blick auf den Beweis zeigt, daß man diese Aussage abtrennen kann.) ■

Leider endet mit diesem Lemma die Reihe der vollständig befriedigenden Aussagen zur Existenz des Newtonschen Grenzwertes. Betrachte man das nächste der Axiome: $R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}_{\bullet}{}_{\delta} = R^{\gamma}{}_{\delta}{}^{\alpha}_{\bullet}{}_{\beta}$. Die mathematischen Minimalforderungen an die Existenz des Grenzwertes der Schar und seine Eigenschaft, Lösung für $\lambda = 0$ zu sein, garantieren zwar $\lim_{\lambda\to 0} R_{\mu\nu} \exists\!= \underset{0}{R}{}_{\mu\nu}$, aber nicht, daß der Grenzwert des Riemann-Tensors existiert, und schon gar nicht, daß er etwas mit dem Riemann-Tensor des Grenzwertes zu tun hat. Wie soll man da etwas mit dem Axiom anfangen können?

Eine solche Schar, die einen Grenzwert besitzt, der eine Lösung der Rahmentheorie für $\lambda = 0$ ist, deren Riemann-Tensor aber nicht konvergiert oder zumindest nicht gegen den Krümmungstensor des Grenzwertes, kann nur dadurch entstehen, daß zweite Ableitungen nach den Koordinaten nicht mit dem λ-Grenzwert vertauschen. Nach dieser Bemerkung sehe ich förmlich einen typischen physikalischen Leser vor mir, der kopfschüttelnd sagt: „Deine Sorgen möchte ich haben!“ Dazu ist zweierlei zu bemerken: zum einen haben wir gerade gesehen, daß man für die ersten Ableitungen der Metriken *beweisen* kann, daß sie mit dem Grenzwert vertauschen; daher muß ich wenigstens erwähnen, daß es bei den zweiten Ableitungen so nicht mehr geht. Und zum anderen sollte man sich darüber im Klaren sein, wie einfach es ist, Funktionen $f(x,\lambda)$ hinzuschreiben, deren x-Ableitung nicht mit dem λ-Grenzwert vertauscht: $\lambda \sin(x/\lambda)$ ist ein notorisches Beispiel.

Dem aufmerksamen Leser ($\in \emptyset$?) wird nicht entgangen sein, daß ich das Problem an dieser Stelle bereits beseitigt habe: in der Definition 1 des Newtonschen Grenzwertes steht die Forderung, daß der Riemann-Tensor einen Grenzwert haben muß, und daß dieser mit dem Krümmungstensor des Grenzwertes identisch zu sein hat. Die Motivation dafür war natürlich das Umgehen der hier auftretenden mathematischen Schwierigkeiten. Gestattet habe ich es mir aber nur aus einem physikalischen Grund: vom Newtonschen Grenzwert erwartet man, daß er den Lösungen der Schar so ähnlich wie möglich sein soll. Dies macht es wenig sinnvoll, in direkt beobachtbaren Größen Unstetigkeiten in λ zuzulassen. Der Krümmungstensor ist aber die mathematische Beschreibung der Gezeitenkräfte, und die *sind* direkt beobachtbar. Daher kann ich diese zusätzliche Bedingung durchaus mit meinem mathematisch-physikalischen Gewissen vereinbaren.

Bedauerlicherweise hat unsere Geschichte aber auch damit noch kein happy-end. Das Axiom 4(b) ist jetzt zwar im Grenzwert garantiert, aber stattdessen müssen wir uns mit der Bedingung $\lim_{\lambda\to 0} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \exists\!= \underset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ auseinandersetzen, denn natürlich sollte diese Forderung auf einfachere Aussagen zurückgeführt werden. Es wäre schön, könnte man hieraus z. B. schließen, daß die zweiten Ableitungen der Metriken mit dem Grenzwert vertauschen, doch ist das nicht der Fall. Bevor man dies zu sehr bedauert, sollte man sich vor Augen halten, daß die Unmöglichkeit, die $g_{\mu\nu,\sigma\tau}$ als punktweise Funktionen von $g_{\mu\nu}$, $h^{\alpha\beta}$, $g_{\mu\nu,\sigma}$, ${h^{\alpha\beta}}_{,\sigma}$ und ${R^\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ zu schreiben, eine direkte Folge der Tensoreigenschaft von ${R^\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ ist; dies kann man sich am flachen Raum in verschiedenen Koordinaten klar machen. Es bleibt einem daher wohl nichts anderes übrig, als sich mit hinreichenden Bedingungen für die Existenz des Grenzwertes zu bescheiden.

Satz 1 (Newtonscher Grenzwert). *Sei I ein Intervall von $\mathbb{R}$, $0 \in I$, $\Lambda := I - \{0\}$ offen. Gegeben sei eine Schar $\big(M, g_{\mu\nu}(\lambda), h^{\alpha\beta}(\lambda), \Gamma^\eta_{\sigma\tau}(\lambda), T^{\alpha\beta}(\lambda), \lambda, G\big)_{\lambda\in\Lambda}$ von Lösungen der Rahmentheorie auf einer Mannigfaltigkeit M. Die Metriken seien C^k, der Zusammenhang C^{k-1} und der Materietensor zumindest C^1; $k \in \overline{\mathbb{N}} - \{1\}$. $\mathcal{B}_2$ sei die Menge aller $B \in \mathcal{B}_1$ (siehe Lemma 2), für die zusätzlich $\lim_{\lambda\to 0} {B^\mu}_{,\sigma\tau} \exists\!= {\underset{0}{B}{}^\mu}_{,\sigma\tau}$ ist. Es gelte:*

(a) — *Der Grenzwert von $h^{\alpha\beta}$ existiert, ist C^k, positiv semidefinit und hat den Rang 3.*
— *Der Grenzwert von $\frac{1}{\lambda}\det(h^{\alpha\beta})$ existiert, ist C^k und kleiner als Null.*
— *Für die Metriken vertauschen die Koordinatenableitungen bis einschließlich der zweiten mit dem Grenzwert.*

(b) *Zu jedem $p \in M$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}_2$ mit $(p, 0) \in \mathrm{Def}\, B$ und den Eigenschaften:*
— *Der Grenzwert von $F_{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda} B^\bullet_{[\nu,\mu]}$ existiert und ist C^{k-1}.*
— *Die ersten Ableitungen von $F_{\mu\nu}$ vertauschen mit dem Grenzwert.*

(c) *Der Grenzwert für $\lambda \to 0$ des Materietensors existiert, ist C^1, und es gilt: $\lim_{\lambda\to 0} {T^{\alpha\beta}}_{,\beta} \exists\!= (\lim_{\lambda\to 0} T^{\alpha\beta})_{,\beta}$.*

Dann hat die Schar einen Newtonschen Grenzwert mit C^k-Metriken und einem C^{k-1}-Zusammenhang.

Beweis: Die Existenz der Grenzwerte der Metriken und des Zusammenhanges folgt aus den vorangegangenen Lemmata. Für die entsprechende Aussage über den Krümmungstensor muß

$$\lim_{\lambda\to 0} \Gamma^\alpha_{\beta[\gamma,\delta]} \exists\!= \underset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta[\gamma,\delta]}$$

gelten. Wie man aus der Darstellung (3) ablesen kann, garantieren die Voraussetzungen des Satzes aber bereits $\lim_{\lambda\to 0} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} \exists\!= \underset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma,\delta}$. Damit hat der Riemann-Tensor einen Grenzwert, und dieser ist gleich dem Krümmungstensor zu $\underset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$. Existenz des Grenzwertes von $T^{\alpha\beta}$ schließlich ist in den Voraussetzungen enthalten, so daß alle Felder der Schar Grenzwerte besitzen.

Die Eigenschaft der Grenzfelder, eine Lösung der Rahmentheorie zu $\lambda = 0$ zu bilden, ergibt sich für die Axiome 3–4 aus den Lemmata 1 und 2. Daß Axiom 5 im Grenzwert gilt, ist schließlich aus den Annahmen herleitbar, indem man das Axiom für $\lambda \neq 0$ nimmt und seinen Grenzwert bildet. ■

3.3. Beispiele für Newtonsche Grenzwerte

3.3.1. „Zeitorthogonale“ Koordinatensysteme

Mit „zeitorthogonal“ meine ich ein Koordinatensystem (t, x^i), in dem die Schar der Metriken $g_{\mu\nu}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, so aussieht:

$$g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\mu = e^{2U(\lambda)} dt^2 - e^{-2U(\lambda)} \tilde{a}_{ij}(\lambda)\, dx^i dx^j, \qquad \tilde{a}_{ij} \text{ ist positiv definit.} \tag{4}$$

(Der Faktor $\exp(-2U)$ vor $\tilde{a}_{ij}$ steht nur aus Gründen der relativistischen Konvention dort. Für den Newtonschen Grenzwert ist er irrelevant.) Der Einfachheit halber sei angenommen, daß alle auftretenden Funktionen mindestens sooft differenzierbar sind wie es notwendig ist.

Bestimmen wir zunächst die Bedingungen für den Grenzwert der Metriken.

$$\left(h^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} -\lambda \exp(-2U) & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \lambda \exp(2U) \tilde{a}^{ij} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \tilde{a}_{ij}\tilde{a}^{jk} = \delta_i^k.$$

Mit Lemma 1 und $\exp(2U) > 0$ ist die Existenz des Grenzwertes äquivalent zu:

$$\lim_{\lambda\to 0} \left(\lambda e^{-2U}\right) \exists = 0, \qquad \lim_{\lambda\to 0} \left(\lambda e^{2U} \tilde{a}^{ij}\right) \exists \text{ und ist positiv definit,}$$
$$\lim_{\lambda\to 0} \left(\lambda^3 e^{4U} \det\left(\tilde{a}^{ij}\right)\right) \exists > 0.$$

Nimmt man die Determinante der zweiten Aussage, so findet man:

$$\lim_{\lambda\to 0} \left(\lambda^3 e^{6U} \det\left(\tilde{a}^{ij}\right)\right) \exists > 0.$$

Das aber kann man durch die dritte Aussage dividieren; es führt auf:

$$\lim_{\lambda\to 0} e^{2U(\lambda)} \exists > 0 \iff \lim_{\lambda\to 0} U(\lambda) \exists\,.$$

Berücksichtigen wir dieses Teilresultat in unseren Bedingungen, so bleibt nur:

$$\lim_{\lambda\to 0} \left(\lambda \tilde{a}^{ij}\right) \exists \text{ und ist positiv definit.}$$

Dies legt es nahe, eine neue 3-Metrik zu definieren:

$$a_{ij} := \tfrac{1}{\lambda}\, \tilde{a}_{ij} \text{ (positiv definit)}, \qquad a_{ij}a^{jk} = \delta_i^k,$$
$$\implies g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = e^{2U(\lambda)} dt^2 - \lambda e^{-2U(\lambda)} a_{ij}\, dx^i dx^j. \tag{5}$$

Die Bedingungen für den Newtonschen Grenzwert der Metriken lauten dann:

$$\lim_{\lambda\to 0} U(\lambda) \exists, \qquad \lim_{\lambda\to 0} a_{ij} \exists \text{ und ist positiv definit.} \tag{6}$$

Nun zum Zusammenhang. Zunächst ergibt sich:

$$\lim_{\lambda\to 0} U_{,\mu} \;\exists\!= \underset{0}{U}_{,\mu}, \qquad \lim_{\lambda\to 0} a_{ij,\mu} \;\exists\!= \underset{0}{a}_{ij,\mu}. \tag{7}$$

Dann brauchen wir ein $B \in \mathcal{B}_1$, und da nehmen wir natürlich eines proportional zu $\frac{\partial}{\partial t}$:

$$B = e^{-U}\tfrac{\partial}{\partial t} \implies B^{\bullet}_{\mu} dx^{\mu} = e^{U} dt \implies F = d\left(\tfrac{1}{\lambda} e^{U} dt\right) = -\tfrac{1}{\lambda} U_{,i}\, e^{U}\, dt \wedge dx^{i}.$$

Folglich muß gelten:

$$\lim_{\lambda\to 0} \left(\tfrac{1}{\lambda} U_{,i}(\lambda)\right) \exists\,. \tag{8}$$

Dieses Ergebnis legt es nahe, von U einen rein zeitabhängigen Teil niedrigster λ-Ordnung abzuspalten. Dazu wähle ich eine durch t parametrisierte Kurve c und definiere:

$$\begin{aligned} V(t) &:= U\left(t, c^{i}(t)\right), \qquad W(t,x^{i}) := \tfrac{1}{\lambda}\big(U(t,x^{i}) - V(t)\big) \\ \implies U(t,x^{i}) &= V(t) + \lambda W(t,x^{i}), \qquad W\big(t, c^{i}(t)\big) = 0. \end{aligned}$$

Aus (7) und (8) folgt, daß $\underset{0}{U}$ nur von t abhängt, so daß es gleich $\underset{0}{U}$ längs c ist. Damit erhält man aus (6–8):

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to 0} V &\;\exists\!=: \underset{0}{V}, & \lim_{\lambda\to 0} (\lambda W) &\;\exists\!= 0, \\ \lim_{\lambda\to 0} (V_{,t} + \lambda W_{,t}) &\;\exists\!= \underset{0}{V}_{,t}, & \lim_{\lambda\to 0} W_{,i} &\;\exists\!=: -g_i. \end{aligned} \tag{9}$$

Wie man sieht, erhält man die Existenz des Grenzwertes von W nicht, ohne zusätzliche Forderungen zu stellen. (Eine mögliche Forderung ist die der gleichmäßigen Konvergenz in jeder Zeitschicht. Dann kann man die letzte Gleichung integrieren und bekommt das Gewünschte zumindest in einer geeigneten (z. B. konvexen) den Punkt $c(t)$ enthaltenden Menge.)

Man beachte, daß nur W zum Newtonschen Gravitationsfeld wesentlich beiträgt:

$$\underset{0}{F} = \big(\exp \underset{0}{V}(t)\, dt\big) \wedge \big(g_i\, dx^{i}\big). \tag{10}$$

Wie man sieht, erhält man einen „reinen“ Newtonschen Grenzwert ohne Coriolisfeld. Der Faktor $\exp \underset{0}{V}$ stammt daher, daß die Koordinate t nicht unbedingt bei $\lambda = 0$ die dort definierte absolute Zeit sein muß. Mit

$$\tilde{t} := \int_{t_0}^{t} \exp \underset{0}{V}(\bar{t}) d\bar{t}$$

läßt sich das beheben: in diesen neuen Koordinaten erhält man dieselben Ausdrücke wie vorher, nur gilt zusätzlich $\underset{0}{V}(t) = 0$.

Das Newtonsche Potential U_N bestimmt sich aus $g_i = -U_{N,i}$, und seine (lokale) Existenz folgt aus der Forderung $d\underset{0}{F} = 0$. Wenn für W der λ-Grenzwert existiert und mit den räumlichen Ableitungen vertauscht, dann kann man $U_N = \underset{0}{W}$ setzen.

Fassen wir die wesentlichen Ergebnisse vereinfacht zusammen:

Newtonscher Grenzwert in „zeitorthogonalen“ Koordinaten. *Abgesehen von Fragen der Differenzierbarkeit und der Vertauschbarkeit von Grenzwerten gilt: für eine Schar von Metriken* $g_{\mu\nu}(\lambda)$,

$$g_{\mu\nu}(\lambda)dx^\mu dx^\nu = e^{2U(\lambda)}dt^2 - \lambda e^{-2U(\lambda)}a_{ij}(\lambda)dx^i dx^j, \qquad a_{ij} \text{ positiv definit,}$$

existieren genau dann Grenzwerte von Raummetrik, Zeitmetrik und Zusammenhang, die die Axiome 3–4 erfüllen, wenn gilt:

(a) $\lim_{\lambda\to 0} a_{ij}$ *existiert und ist positiv definit.*

(b) Es gibt Funktionen $V(t)$, $W(t,x^i)$ *mit den Eigenschaften:*

$$U(t,x^i) = V(t) + \lambda W(t,x^i), \qquad \lim_{\lambda\to 0} V \,\exists\!= \underset{0}{V}, \quad \lim_{\lambda\to 0} W \,\exists\!= \underset{0}{W}.$$

Der Grenzwert enthält kein Coriolisfeld. Wählt man Koordinaten, in denen t *bei* $\lambda = 0$ *die absolute Zeit ist, also* $\underset{0}{V} = 0$ *gilt, so kann man* $\underset{0}{W}$ *mit dem Newtonschen Potential identifizieren. Für die Gültigkeit von Axiom 5 schließlich ist unter den hier gemachten Voraussetzungen die Existenz des Grenzwertes des über die Feldgleichungen definierten Materietensors ausreichend.*

3.3.2. Die Kerr-Metrik

Gegeben sei die Kerr-Metrik in Boyer-Lindquist Koordinaten $(x^0, r, \vartheta, \varphi)$. Zunächst ändere ich die Zeitkoordinate ab zu $t := x^0/c$. Dann ersetze ich die dadurch entstandenen c-Terme durch $1/\sqrt{\lambda}$, und nehme außerdem an, daß Schwarzschild-Radius r_S und Drehimpulsparameter a unbekannte Funktionen von λ sind. Damit habe ich eine Schar von Kerr-Metriken:

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= -\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{r_S r}{\Sigma}\right)dt^2 + \frac{\Sigma}{r^2 - r_S r + a^2}dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 \\ &\quad + \sin^2\!\vartheta\left(r^2 + a^2 + \frac{r_S r}{\Sigma}a^2\sin^2\!\vartheta\right)d\varphi^2 + 2\frac{a}{\sqrt{\lambda}}\frac{r_S r}{\Sigma}\sin^2\!\vartheta\, dt d\varphi, \\ \Sigma &:= r^2 + a^2\cos^2\!\vartheta, \\ t &\in (-\infty,\infty),\ r \in (0,\infty),\ \vartheta \in (0,\pi),\ \varphi \in (-\pi,\pi).\end{aligned} \tag{11}$$

Masse und Drehimpuls dieser Schar sind:

$$m(\lambda) = \frac{r_S(\lambda)}{2G\lambda}, \qquad J(\lambda) = \frac{a(\lambda)\, m(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}. \tag{12}$$

Eine kleine Komplikation ergibt sich bei $r_S > 2\,|a|$ aus dem möglichen Verschwinden des Nenners $r^2 - r_S r + a^2$. Ich mache daher zusätzlich die Annahme, daß die Funktion $r_S(\lambda)$ für λ hinreichend nahe bei 0 immer kleiner ist als ein festes $r_0 \geq 0$. Die notwendigen Bedingungen für die Existenz des Grenzwertes der Schar werden dann hergeleitet im Bereich

$r > r_0$, und es wird sich zeigen, daß r_S gegen Null gehen muß, so daß der Grenzwert für alle $r > 0$ gebildet werden kann.

Wie man an den Dimensionen sehen kann, ist $\hat{g}_{\mu\nu}$ nicht die Zeitmetrik, sondern die inverse Raummetrik, d.h. $g_{\mu\nu} = -\lambda\hat{g}_{\mu\nu}$. Es gilt:

$$\det\left(h^{\alpha\beta}\right) = \det\left(\hat{g}_{\mu\nu}\right)^{-1} = -\frac{\lambda}{\Sigma^2 \sin^2\vartheta}.$$

Daraus schließen wir als notwendig für die Existenz eines Newtonschen Grenzwertes:

$$\lim_{\lambda\to 0} |a(\lambda)| \;\exists{=}{:}\; |a_0|. \tag{13}$$

Das Vorzeichen von a_0 bleibt unbestimmt, und es wird sich als unwichtig herausstellen. Damit $h^{\alpha\beta}$ einen Grenzwert hat, muß z.B. h^{11} einen besitzen:

$$h^{11} = 1/\hat{g}_{11} = \frac{r^2 - r_S r + a^2}{\Sigma}.$$

Daraus folgt mit (13) sofort:

$$\lim_{\lambda\to 0} r_S(\lambda) \;\exists{=}{:}\; r_S(0). \tag{14}$$

Man kann sich davon überzeugen, daß Existenz der Grenzwerte von $|a|$ und r_S ausreicht, um die Newtonschen Grenzwerte der Metriken sicherzustellen. Gehen wir aber gleich weiter zum Zusammenhang. Mit $B \sim \frac{\partial}{\partial t}$ bekommen wir:

$$\begin{aligned}
& B := w^{-1}\tfrac{\partial}{\partial t}, \qquad w := \sqrt{1 - \frac{r_S r}{\Sigma}}, \\
\Longrightarrow\; & B^{\bullet}_{\mu} dx^\mu = w dt - \sqrt{\lambda}\, a\, \frac{r_S r}{w\Sigma} \sin^2\vartheta \, d\varphi, \\
\Longrightarrow\; & F = \tfrac{1}{\lambda} dw \wedge dt - \frac{a}{\sqrt{\lambda}}\, d\left(\frac{r_S r}{w\Sigma} \sin^2\vartheta\right) \wedge d\varphi.
\end{aligned}$$

Da $F_{\mu\nu}$ einen Grenzwert haben muß, folgt das auch für:

$$\tfrac{1}{\lambda} dw = \frac{r_S}{2\lambda w}\left(\frac{r^2 - a^2\cos^2\vartheta}{\Sigma^2} dr - a^2\, \frac{r \sin 2\vartheta}{\Sigma^2} d\vartheta\right).$$

Hieraus wiederum entnimmt man:

$$\lim_{\lambda\to 0} m(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{r_S(\lambda)}{2G\lambda} \;\exists{=}{:}\; m_0. \tag{15}$$

Der Grenzwert von $F_{\mu\nu}$ lautet dann:

$$\begin{aligned}
\underset{0}{F} &= \frac{Gm_0}{\Sigma_0^2}\Big((r^2 - a_0^2\cos^2\vartheta)dr - a_0^2 r \sin 2\vartheta \, d\vartheta\Big) \wedge dt \\
&= dU \wedge dt, \qquad U := -\frac{Gm_0 r}{\Sigma_0}, \qquad \Sigma_0 := r^2 + a_0^2\cos^2\vartheta.
\end{aligned} \tag{16}$$

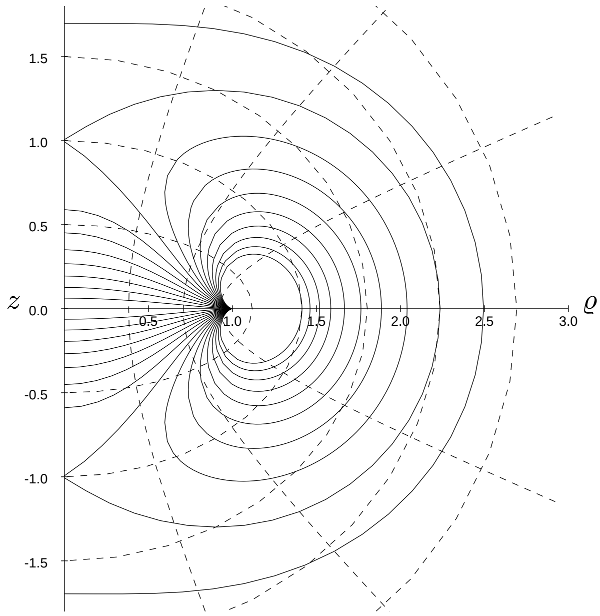
Auch hier gibt es also kein Coriolisfeld. (Das einzige mir bekannte Beispiel für einen Newtonschen Grenzwert mit nicht-trivialem Coriolisfeld wurde von J. Ehlers aus der Taub-NUT Lösung gewonnen.) Für die Metriken folgt:

$$\begin{aligned} \big(\underset{0}{g}_{\mu\nu}\big) &= \operatorname{diag}(1,0,0,0), \\ \big(\underset{0}{h}^{\alpha\beta}\big) &= \operatorname{diag}\big(0,\ (r^2+a_0^2)/\Sigma_0,\ 1/\Sigma_0,\ 1/(r^2+a_0^2)\sin^2\vartheta\big) \end{aligned} \tag{17}$$

Da in (11) die Differentiationen nach den Koordinaten und der λ-Grenzwert vertauschen, und die Kerr-Metrik eine Vakuum-Lösung ist, haben wir den Newtonschen Grenzwert der Familie (11) bereits vollständig bestimmt: er existiert unter den Voraussetzungen (13, 15) und wird beschrieben durch (16) und (17). (Dieser Grenzwert der Kerr-Metrik wurde von H. Keres [7] gefunden, allerdings mit einer umständlicheren und nicht kovarianten Rahmentheorie.)

Zunächst müssen wir die Koordinaten verstehen. An der Zeitmetrik sieht man, daß t die absolute Zeit ist. Wir wissen, daß die Zeitschichten flach sind, so daß (r,ϑ,φ) Koordinaten des Euklidischen $\mathbb{R}^3$ sein müssen. Es handelt sich dabei um eine Variante der sogenannten „Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids“ (Madelung [8], Seite 236–237) oder „oblate spheroidal coordinates“ (Arfken [9], Seite 97–98). Die Transformation auf kartesische Koordinaten (x,y,z) lautet:

$$x = \sqrt{r^2+a_0^2}\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad y = \sqrt{r^2+a_0^2}\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\vartheta.$$



Äquipotentiallinien im Newtonschen Grenzwert der Kerr-Metrik für $a_0 \neq 0$: Die Einheit des Koordinatensystems ist $|a_0|$; es sei $\varrho := \sqrt{x^2+y^2}$. Durchbrochene Linien sind Kurven mit konstantem r oder ϑ; ϑ wächst im Uhrzeigersinn. Gezeigt sind Potentiallinien in Schritten von $\Delta U = \frac{1}{16}\,Gm_0/a_0$.

Bei $a_0 \neq 0$ sind die Flächen $r = const. > 0$ Rotationsellipsoide, und die Flächen $\left|\vartheta - \frac{\pi}{2}\right| = const. \neq \frac{\pi}{2}$ bilden einschalige Rotationshyperboloide, beide mit dem „Brennkreis" $x^2 + y^2 = a_0^2$ (siehe Bild). Man beachte die Unstetigkeit des ϑ-Wertes beim Durchstoßen der Kreisfläche $x^2 + y^2 < a_0^2$, $z = 0$.

Aber nun zum Gravitationsfeld. Die Gravitationsbeschleunigung g,

$$g = -dU = \frac{Gm_0}{\Sigma_0^2}\Big(- (r^2 - a_0^2 \cos^2\vartheta)dr + a_0^2 r \sin 2\vartheta \, d\vartheta\Big), \tag{18}$$

hat bei $m_0 > 0$ eine ϑ-Komponente, die oberhalb der (x, y)-Ebene positiv und unterhalb negativ ist: sie weist also stets von der z-Achse weg. Die r-Komponente wechselt ihr Vorzeichen auf der Kugeloberfläche $r^2 = a_0^2 \cos^2\vartheta$ oder $x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2$: außerhalb zeigt sie nach innen, innerhalb nach draußen. Für große r dominiert in der Beschleunigung der radiale anziehende Teil. Bewegt man sich also von außen auf die innere Kreisscheibe zu, so verringert sich die Anziehung um schließlich in Abstoßung überzugehen. Die Unstetigkeit der Beschleunigung auf der Scheibe führte Keres [7] dazu, hier eine Belegung durch negative Masse anzunehmen. Aber das ist nicht notwendig, und vom Standpunkt der Differentialgeometrie aus auch nicht natürlich. Stattdessen kann man der Behandlung der Kerr-Metrik durch Boyer und Lindquist [10] folgen, die Lösung durch das Innere der Scheibe hindurch zu negativen r-Werten stetig fortsetzen und damit auch den Sprung in der ϑ-Koordinate eliminieren. Das bedeutet dann: bewegt man sich z.B. von oben durch den Ring hindurch, so kommt man nicht wieder unten heraus, sondern gelangt in eine zweite Newtonsche Kerr-Lösung, die aber jetzt die entgegengesetzte Masse besitzt. Genau wie bei der relativistischen Kerr-Metrik kann man auf diese Weise eine unendliche Kette von Lösungen mit abwechselnd positiver und negativer Masse erzeugen.

Diese Lösung ist bei $m_0 a_0 \neq 0$ nur als ein Kuriosum zu betrachten und dürfte keine physikalische Bedeutung besitzen. Der Grund ist, daß bei $\lambda \to 0$ erstens der Drehimpuls $J = am/\sqrt{\lambda}$ divergiert, und zweitens gerät man früher oder später in den Bereich $4a^2 > r_S^2$ der über-extremen Kerr-Lösung, wo der Ereignishorizont verschwunden ist und man geschlossene zeitartige Kurven finden kann (Carter [11]). Fordert man aus diesem Grund $a_0 = 0$, so gelangt man zum einfachen Massenpunkt in Kugelkoordinaten. Verlangt man zusätzlich, daß die Lösungen stets im Bereich $4a^2 \leq r_S^2$ bleiben sollen, so folgt, daß der Drehimpuls gegen Null gehen muß.

Man sieht, daß man aus der Kerr-Lösung in diesen Koordinaten drei qualitativ verschiedene Grenzwerte bekommen kann:

$m_0 = 0$: Feld-freier Euklidischer Raum,
$m_0 \neq 0$, $a_0 = 0$: Massenpunkt,
$m_0 \neq 0$, $a_0 \neq 0$: Ring mit Tor zu weiteren Lösungen.

Den ersten Grenzwert erhält man schon bei $m(\lambda) = 0$, also für eine Schar von Minkowski-Raumzeiten, den zweiten entsprechend mit $a(\lambda) = 0$ aus einer Familie von Schwarzschild-Lösungen. So gesehen ist nur der dritte ein „typischer" Newtonscher Grenzwert der Kerr-Lösung.

3.4. Was bedeutet das Bilden des Newtonschen Grenzwertes?

Vorgegeben sei eine Schar mathematischer Modelle der Rahmentheorie, $MM(\lambda) = \big(M, g_{\mu\nu}(\lambda), h^{\alpha\beta}(\lambda), \Gamma^{\eta}_{\sigma\tau}(\lambda), T^{\gamma\delta}(\lambda), \lambda, G\big)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, und ihr Newtonscher Grenzwert MM_0. Was für eine Folge gedachter physikalischer Situationen sollte man sich darunter beim Grenzübergang $\lambda \to 0$ vorstellen? Diese Frage ist nicht trivial, denn λ ist eine dimensionsbehaftete Größe, so daß der Wert von λ allein keine physikalische Bedeutung hat.

Um Konfusion zu vermeiden möchte ich zunächst folgende Sprachregelung treffen: unter „Lichtgeschwindigkeit“ verstehe ich in dieser Arbeit stets die experimentell bestimmte Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Vakuum. (Diese Einschränkung erlaube ich mir, weil die hier betrachtete Rahmentheorie das Licht nicht enthält, so daß man keinen Namen für ein theoretisches Pendant braucht.) Um sie anzugeben muß man ein Einheitensystem wählen, und den darin ermittelten numerischen Wert bezeichne ich mit c. Man kann sich somit „Lichtgeschwindigkeit“ zusammengesetzt denken aus c und den gewählten Einheiten.

Nun zurück zu $MM(\lambda)$. Wenn man die Schar interpretieren will, muß man also zusätzlich Einheiten angeben. Im einfachsten Fall wählt man ein festes System von Einheiten S_0 und betrachtet die Schar physikalischer Modelle

$$PM_1(\lambda) := \big(MM_1(\lambda), S_0\big), \qquad \lambda \in \mathbb{R}_0^+,$$

wobei $MM_1(\lambda)$ die bei $\lambda = 0$ durch MM_0 vervollständigte Schar $MM(\lambda)$ bezeichnen soll. Was bedeutet diese „1-Schar Interpretation“ des Newtonschen Grenzwertes?

Im Abschnitt 2.2.2 haben wir gesehen, daß bei $\lambda > 0$ die Relativgeschwindigkeit beliebiger Paare zeitartiger Tangentenvektoren kleiner ist als $1/\sqrt{\lambda}$ (Gleichung (2.13)). Dann kann aber die Rahmentheorie für verschiedene Werte von λ prinzipiell unterschiedliche physikalische Aussagen liefern. Daraus folgt, daß die Rahmentheorie aufzufassen ist als eine Schar verschiedener durch λ parametrisierter Theorien. Die Newtonsche Gravitationstheorie findet man bei $\lambda = 0$, die Einsteinsche bei $\lambda = c^{-2}$ (mit $c = 1$ also z.B. bei $\lambda = 1$), und dazwischen liegt ein ganzes Kontinuum anderer Theorien. Man bewegt sich mit der Schar $PM_1(\lambda)$ durch diese verschiedenen Theorien hindurch.

Nun kann man natürlich der Meinung sein, daß zwei Theorien — die Newtonsche und die Einsteinsche — bereits reichlich sind, und daß ein Kontinuum von Theorien dazwischen wirklich mehr ist, als ein bescheidener Mensch benötigt. Das hängt etwas an der Bedeutung von „Theorie“: ich habe hier im Bereich $\lambda > 0$ Theorien als verschieden bezeichnet, wenn sie sich im Wert einer Konstanten unterscheiden, nämlich der Schranke für die Relativgeschwindigkeit von Beobachtern. Das ist streng genommen korrekt, aber kein wesentlicher Unterschied. (Man denke sich einmal zwei Physiker, die eine quantenmechanische Rechnung durchführen. Der eine setzt das Plancksche Wirkungsquantum mit 3 Stellen Genauigkeit ein, der andere mit 4. Arbeiten sie mit derselben Theorie?) Insbesondere kann man im Bereich $\lambda > 0$ jedes mathematische Modell als zu jeder dieser Theorien gehörig betrachten, wenn man nur die Einheiten passend wählt. (Das werden wir gleich ausnutzen.)

Insofern besteht ein signifikanter Unterschied nur zwischen der Theorie zu $\lambda = 0$ und den Theorien zu $\lambda > 0$.

Versuchen wir trotzdem einmal, nur mit zwei Theorien auszukommen. Dafür muß man sich zu $MM(\lambda)$ eine Schar von Einheitensystemen $S(\lambda)$ so vorgeben, daß die Schar

$$PM_2(\lambda) := \big(MM(\lambda), S(\lambda)\big), \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

immer Lösungen mit der Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit beschreibt:

$$\text{Für jedes } \lambda \text{ gilt: } \lambda = c^{-2} \text{ im System } S(\lambda). \tag{19}$$

Man kann also z. B. die Längeneinheit oder die Zeiteinheit wählen, muß dann aber die andere aus der Lichtausbreitung bestimmen. Der Massenstandard wird davon nicht berührt. Aus Gründen der Übersicht empfiehlt es sich, zunächst ein System S_0 als Bezugssystem einzuführen, denn dann kann man jedes andere System von Einheiten eindeutig durch 3 Maßzahlen bezüglich S_0 kennzeichnen. Ich konstruiere S_0 so:

- — wähle einen Zeitstandard Z_0 und einen Massenstandard M_0,
- — definiere den Längenstandard L_0 als die in der Zeit 1 vom Licht im Vakuum zurückgelegte Strecke.

In diesem System gilt $c = 1$. Ich fordere dann, daß die gesuchte Schar von Einheitensystemen,

$$S(\lambda) = \big(Z(\lambda), L(\lambda), M(\lambda)\big) = \big(a(\lambda)Z_0, \beta(\lambda)L_0, \gamma(\lambda)M_0\big),$$

die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) Die Beziehung (19) gilt.
(b) G in $PM_2(\lambda)$ soll die Maßzahl einer λ-unabhängig bestimmten Größe sein.
(c) $S(1) = S_0$.

Die Forderung (b) hat zur Folge, daß Transformationen zwischen Systemen der Schar $S(\lambda)$ den Wert von G unverändert lassen müssen. Damit ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} &\lambda = c^{-2}|_{S(\lambda)} = \left(\tfrac{\beta(\lambda)}{\alpha(\lambda)}\right)^2 c^{-2}|_{S_0} = \left(\tfrac{\beta(\lambda)}{\alpha(\lambda)}\right)^2, \\ &\frac{\alpha^2(\lambda)\,\gamma(\lambda)}{\beta^3(\lambda)} = \mathit{const.}, \qquad \alpha(1) = \beta(1) = \gamma(1) = 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Eliminiert man β und γ, so ist die Schar der Einheiten festgelegt bis auf:

$$S(\lambda) = \big(\alpha(\lambda)Z_0, \sqrt{\lambda}\,\alpha(\lambda)L_0, \lambda^{3/2}\alpha(\lambda)M_0\big), \qquad \alpha(1) = 1. \tag{21}$$

Und hier scheinen wir in Schwierigkeiten zu geraten: wir können die Schar $PM_2(\lambda)$ nicht zu $\lambda = 0$ fortsetzen, denn $S(\lambda)$ hat keinen Grenzwert für $\lambda \to 0$: mindestens einer der Standards wächst bei $\lambda \to 0$ über alle Grenzen oder schrumpft auf nichts zusammen. Damit hat man keine Möglichkeit, von $PM_2(\lambda)$ aus den Grenzwert MM_0 physikalisch zu interpretieren, denn ohne ein Einheitensystem bei $\lambda = 0$ kann man die Zahlen von MM_0 nicht mit Messungen in Bezug bringen.

Einen Ausweg aus dieser Situation bietet eine von J. Ehlers [12] vorgeschlagene Sichtweise, die ich als die „2-Scharen Interpretation" des Newtonschen Grenzwertes bezeichne. Die eine Schar ist natürlich $PM_2(\lambda)$, die andere konstruiert man aus MM_0. Dazu nutzt man aus, daß Ähnlichkeitstransformationen von Lösungen der Rahmentheorie (Gleichung (2.2)) die Eigenschaft haben, bei den Lösungen mit $\lambda = 0$ den Wert von λ unverändert zu lassen. (Bei $\lambda \neq 0$ gilt das dagegen nur für die durch $\alpha = \beta$ eingeschränkten Transformationen.) Man kann also zu MM_0 eine beliebige Schar von Einheitensystemen hinzufügen und erhält immer eine Schar nichtrelativistischer physikalischer Modelle. Also nehmen wir doch einfach $S(\lambda)$:

$$PM_3(\lambda) := \big(MM_0, S(\lambda)\big), \qquad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Man beachte, daß dieses Vorgehen willkürlich ist.

Damit hat man nun zwei Scharen physikalischer Modelle: eine relativistische, $PM_2(\lambda)$, mit $\lambda = c^{-2}$, und eine nicht-relativistische, $PM_3(\lambda)$, mit $\lambda = 0$. Um sie zu vergleichen empfiehlt es sich, die λ-Abhängigkeit dort zu konzentrieren, wo man damit rechnen kann, d. h. in den mathematischen Modellen. Mit Satz 2.1 können wir eindeutig mathematische Modelle $MM_2(\lambda)$, $MM_3(\lambda)$ definieren, für die gilt:

$$\begin{aligned} PM_2(\lambda) &= \big(MM(\lambda), S(\lambda)\big) &&= \big(MM_2(\lambda), S_0\big), \\ PM_3(\lambda) &= \big(MM_0, S(\lambda)\big) &&= \big(MM_3(\lambda), S_0\big), \end{aligned}$$

und zwar:

$$\begin{aligned} MM_2(\lambda) &:= \big(M,\, \alpha^2 g_{\mu\nu},\, \lambda^{-1}\alpha^{-2} h^{\mu\nu},\, \Gamma^{\eta}_{\sigma\tau},\, \alpha^{-4} T^{\mu\nu},\, 1,\, G\big), \\ MM_3(\lambda) &:= \big(M,\, \alpha^2 \underset{0}{g}_{\mu\nu},\, \lambda^{-1}\alpha^{-2} \underset{0}{h}^{\mu\nu},\, \underset{0}{\Gamma}{}^{\eta}_{\sigma\tau},\, \alpha^{-4} \underset{0}{T}^{\mu\nu},\, 0,\, G\big). \end{aligned} \tag{22}$$

Man beachte, daß $MM_3(\lambda)$ die Eigenschaft hat, daß alle Elemente der Schar zueinander ähnlich sind. Das ist bei $MM_2(\lambda)$ nie der Fall.

Natürlich haben weder MM_2 noch MM_3 Grenzwerte für $\lambda \to 0$, egal wie man $\alpha(\lambda)$ wählt. Das Ziel der 2-Scharen Interpretation ist aber auch nicht ein Vergleich zwischen einer Schar und ihrem Grenzwert, sondern der Vergleich zwischen den beiden Scharen. Nehmen wir als Beispiel eine λ-unabhängige differenzierbare Kurve $q : [0,1] \to M$, die bezüglich $\underset{0}{g}_{\mu\nu}$ zeitartig ist. Wenn der Grenzübergang $MM(\lambda) \to MM_0$ auf kompakten Teilmengen von M gleichmäßig ist, dann ist die Kurve zwischen den Endpunkten für jedes hinreichend kleine λ auch noch zeitartig, man kann den zeitlichen Abstand $\tau(\lambda)$ der Endpunkte bestimmen, und es gilt $\lim_{\lambda\to 0} \tau(\lambda) = \tau(0)$. Betrachtet man diese Kurve nun für MM_2 und MM_3, so findet man:

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\tau_2(\lambda) - \tau_3(\lambda)}{\tau_3(\lambda)} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\alpha^2\big(\tau(\lambda) - \tau(0)\big)}{\alpha^2 \tau(0)} = 0.$$

Entsprechendes ergibt sich für raumartige Kurven. Wichtig ist dabei, daß man relative Abweichungen betrachtet, denn nur so heben sich die Skalenfaktoren heraus.

Man gelangt also mit dieser Interpretation zu einer Schar relativistischer und einer Schar nichtrelativistischer Lösungen, für die die relativen Abweichungen gemessener Größen bei $\lambda \to 0$ gegen Null gehen. Was bedeutet das? Betrachtet man sich die Scharen MM_2 und MM_3 einmal näher und setzt versuchsweise $\alpha(\lambda) = 1$, so sieht man, daß bei $\lambda \to 0$ der Materietensor einen Grenzwert hat, während die räumlichen Abstände wie $\lambda^{-1/2}$ divergieren. Damit geht die in einem festen Volumen enthaltene Masse mit $\lambda^{3/2}$ gegen Null. Sollten die Scharen $MM_2(\lambda)$, $MM_3(\lambda)$ etwa in verkappter Weise als Grenzwerte die jeweiligen materiefreien Lösungen haben?

An dieser Stelle muß ich nun doch die selbstgewählte Einschränkung auf λ-abhängige Felder auf einer einzigen Mannigfaltigkeit durchbrechen und eine λ-abhängige Koordinatentransformation machen. Dazu gehe ich aus von MM_0. Aus Abschnitt 2.3 weiß ich, daß man lokal Koordinaten $(t, x^i)\colon U \to \mathbb{R}^4$, $U \subset M$, finden kann, in denen gilt:

$$\begin{aligned} &\big(\underset{0}{g}_{\mu\nu}\big) = \operatorname{diag}\big(1,0,0,0\big), \qquad \big(\underset{0}{h}^{\sigma\tau}\big) = \operatorname{diag}\big(0,1,1,1\big), \\ &\underset{0}{\Gamma}{}^{\mu}_{\beta\gamma} = \delta^{\mu a}(2\Omega_{a(\beta}\, t_{,\gamma)} + E_a t_{,\beta} t_{,\gamma}). \end{aligned}$$

Ich nehme an, daß $0 \in \mathbb{R}^4$ im Wertebereich von (t, x^i) liegt. Dann definiere ich:

$$t' := \alpha(\lambda) t, \qquad \acute{x}^i := \sqrt{\lambda}\, \alpha(\lambda) x^i. \tag{23}$$

Werfen wir jetzt einen Blick auf $MM_3(\lambda)$ in (22), so stellen wir fest, daß die Koordinaten $(t', \acute{x}^i)$ gerade an die in dieser Schar herrschenden geometrischen Verhältnisse angepaßt sind:

$$\begin{aligned} &\big(\acute{g}_{\mu\nu}|_{MM_3}\big) = \operatorname{diag}\big(1,0,0,0\big), \qquad \big(\acute{h}^{\sigma\tau}|_{MM_3}\big) = \operatorname{diag}\big(0,1,1,1\big), \\ &\acute{\Gamma}^{\mu}_{\beta\gamma}(t', \acute{x}^i)|_{MM_3} = \alpha^{-1}\delta^{\mu a}\big(2\Omega_{a(\beta}\, t'_{,\gamma)} + \sqrt{\lambda}\, E_a t'_{,\beta} t'_{,\gamma}\big), \\ &\acute{T}^{00}|_{MM_3} = \alpha^{-2}\underset{0}{T}^{00}, \qquad \acute{T}^{0a}|_{MM_3} = \sqrt{\lambda}\,\alpha^{-2}\underset{0}{T}^{0a}, \qquad \acute{T}^{ab}|_{MM_3} = \lambda\alpha^{-2}\underset{0}{T}^{ab}. \end{aligned} \tag{24}$$

Dabei sind auf den rechten Seiten die Komponenten bezüglich der alten Karte alle zu nehmen an der Stelle $(t, x^i) = (t'/\alpha, \acute{x}^i/\sqrt{\lambda}\alpha)$. Diese Gleichungen enthalten nun noch die bis auf $\alpha(1) = 1$ unbestimmte Funktion $\alpha(\lambda)$. Für die relativen Abweichungen von Längen und Zeiten ist die λ-Abhängigkeit von α belanglos, aber hier spielt sie eine Rolle.

Wählt man α so, daß $\lim_{\lambda\to 0} 1/\sqrt{\lambda}\,\alpha(\lambda)$ existiert, dann existieren auch die Grenzwerte sämtlicher Argumente, damit dann die Grenzwerte von Zusammenhang und Materietensor, und man erhält in diesen Koordinaten als $\lim_{\lambda\to 0} MM_3(\lambda)$ den Feld-freien Euklidischen Raum. Ein solches $\alpha(\lambda)$, nämlich $\alpha(\lambda) = \lambda^{-1/2}$, wurde gewählt in der Arbeit von Futamase und Schutz [13]: sie beginnen mit einer Newtonschen Lösung MM_0, die auf diese Weise in ein $MM_3(\lambda)$ verwandelt wird. Davon ausgehend versuchen sie dann, die Existenz einer „heranschließenden“ Schar $MM_2(\lambda)$ zu zeigen.

Bei anderen Formen von α kommt es darauf an, wie die räumliche und die zeitliche Abhängigkeit der betrachteten Felder zusammenwirken. Der vielleicht interessanteste Fall ist $\alpha(\lambda) = 1$: hier erhält man den leeren Euklidischen Raum z. B. unter folgenden zusätzlichen Annahmen über MM_0:

(a) Die Schichten konstanter Zeit sind isometrisch zum $\mathbb{R}^3$.
(b) Die Felder $\Omega_{\mu\nu}$, E_β und $\underset{0}{T}^{\sigma\tau}$ gehen bei fester Zeit im räumlich Unendlichen gegen Null.

Die erste Bedingung ermöglicht erst das Bilden des Grenzwertes, denn sonst würde $\acute{x}^i/\sqrt{\lambda}$ schnell aus dem Definitionsbereich der Feldkomponenten verschwinden.

Nun zu $MM_2(\lambda)$. Die Koordinatentransformation (23) ergibt:

$$\left(\acute{g}_{\mu\nu}|_{MM_2}\right) = \begin{pmatrix} g_{00} & \lambda^{-1/2} g_{0b} \\ \lambda^{-1/2} g_{a0} & \lambda^{-1} g_{ab} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=t'/\alpha,\, x^i=\acute{x}^i/\sqrt{\lambda}\alpha},$$
$$\left(\acute{h}^{\sigma\tau}|_{MM_2}\right) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} h^{00} & \lambda^{-1/2} h^{0b} \\ \lambda^{-1/2} h^{a0} & h^{ab} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=t'/\alpha,\, x^i=\acute{x}^i/\sqrt{\lambda}\alpha}.$$

Hier mache ich nun eine zusätzliche Annahme über $MM(\lambda)$, nämlich daß

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, g_{0b}(t, x^i)\right) \exists\!= 0 \tag{25}$$

gilt. (Dies erscheint mir recht harmlos: bei geeignet friedlicher Konvergenz von $MM(\lambda) \to MM_0$ kann man $\lambda F = d\omega$ integrieren zu $\omega = d\tau + \lambda A$, $F = dA$. Macht man dann eine Koordinatentransformation auf τ als neue Zeitkoordinate, so findet man sogar, daß $\lim_{\lambda\to 0}(g_{0b}/\lambda)$ existiert. Die sich ergebende Schar hat denselben Newtonschen Grenzwert wie die alte. Man kann sich aber natürlich diese Transformation auch für die Definition von $(t', \acute{x}^i)$ in (23) aufsparen.) Daraus folgt, daß auch der Grenzwert von $\lambda^{-1/2} h^{0b} = -\lambda^{-1/2} h^{bc} g_{c0}/g_{00}$ existiert und gleich Null ist, so daß:

$$\det\left(h^{\sigma\tau}\right) = h^{00} \det\left(h^{ab}\right) + h^{0a}\ \mathrm{adj}\left(h^{cd}\right)_{ab} h^{b0}$$
$$\Longrightarrow\ \lim_{\lambda\to 0}\left(\tfrac{1}{\lambda}\, h^{00}(t, x^i)\right) = \lim_{\lambda\to 0}\left(\tfrac{1}{\lambda}\ \det(h^{\sigma\tau})\right) \exists\!< 0.$$

Wählen wir wieder ein $\alpha(\lambda)$ so, daß $\lim_{\lambda\to 0} 1/\sqrt{\lambda}\alpha$ existiert, so existiert also auch der Grenzwert der Raummetrik, wobei die 00-Komponente noch von den räumlichen Koordinaten x^i abhängen könnte. Da der Grenzwert aber wieder eine nicht ausgeartete Metrik darstellt, existiert auch der Grenzwert der Zeitmetrik, er ist invers zu $\lim_{\lambda\to 0}\left(-\acute{h}^{\sigma\tau}|_{MM_3}\right)$, und es gilt:

$$\lim_{\lambda\to 0} \acute{h}^{00} = -1/\lim_{\lambda\to 0} \acute{g}_{00} = -1.$$

Damit folgt:

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\acute{h}^{\sigma\tau}|_{MM_2}\right) \exists\!= \mathrm{diag}\left(-1, 1, 1, 1\right), \tag{26}$$

und entsprechend für $\acute{g}_{\mu\nu}$: wir erhalten als Grenzwert den Minkowski-Raum.

Damit haben wir gesehen, daß bei geeigneter Wahl der Koordinaten und von $\alpha(\lambda)$ die Scharen MM_2, MM_3 in der Tat gegen die feldfreien Lösungen konvergieren. Die Aussage, daß relative Abweichungen von beobachtbaren Größen gegen Null gehen, besagt unter diesen Umständen, daß sich diese Newtonschen und Einsteinschen Lösungsscharen für schwächer werdende Felder immer stärker einander nähern. Dies erklärt, warum die Leute, die „post-Newtonsche" Entwicklungen dadurch konstruieren, daß sie innerhalb der AR um den Minkowski-Raum entwickeln, überhaupt Formeln erhalten können, die wie die Newtonschen aussehen.

Fassen wir den wesentlichen Gehalt der beiden Sichtweisen zusammen: bei der „1-Schar Interpretation" des Grenzwertes $MM(\lambda) \to MM_0$ betrachtet man den Grenzübergang als einen Weg durch ein Kontinuum von Theorien zwischen der Newtonschen und der Einsteinschen Gravitationstheorie. Bei dieser Interpretation bewegt man sich von einer relativistischen Lösung $MM(c^{-2})$ zu einer Newtonschen Lösung MM_0. Die „2-Scharen Interpretation" faßt dagegen $(MM(\lambda), MM_0)$ auf als eine Kurzform für ein Paar von Scharen $(MM_2(\lambda), MM_3(\lambda))$, von denen eine nur relativistische und die andere nur Newtonsche Lösungen beschreibt. Im Grenzwert $\lambda \to 0$ nähern sich die meßbaren Größen der beiden Scharen einander an, ohne daß aber die Scharen selber gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren.

Für die Interpretation einer vorgegebenen Schar $MM(\lambda)$ und ihres Grenzwertes MM_0 bevorzuge ich die 1-Schar Interpretation wegen ihrer konzeptionellen Einfachheit. Der größere Aufwand der 2-Scharen Interpretation beschert einem dafür zusätzliche Aussagen allgemeiner Art. Erstens sieht man, daß es in gewissen Fällen für hinreichend schwache Gravitationsfelder egal ist, ob man die Newtonsche oder die Einsteinsche Gravitationstheorie verwendet. Zweitens versteht man, unter welchen Voraussetzungen die Formulierung „$c \to \infty$" für den Newtonschen Grenzwert Sinn ergibt. Und drittens erhält man einen Tip, wie man zu einer gegebenen relativistischen Lösung einen Newtonschen Grenzwert bekommen kann (nach diesem Schema bin ich beim Beispiel der Kerr-Metrik verfahren):

(a) Man identifiziere Konstanten oder Funktionen in der Lösung, mit denen man durch spezielle Wahl den Minkowski-Raum erhalten kann. (Das geht also nur, wenn die gegebene Lösung zu einer Lösungsschar der AR gehört, die den Minkowski-Raum beinhaltet.) Von diesen Konstanten oder Funktionen nehme man an, daß sie von λ abhängen.

(b) Man beschränke sich entweder auf die ko- oder die kontravariante Metrik, wähle eine Zeitkoordinate sowie Raumkoordinaten, und führe die Transformation (23) mit geeignetem $\alpha(\lambda)$ rückwärts durch. (Bei Wahl der kontravarianten Metrik ist $\alpha(\lambda) = \lambda^{-1/2}$ geeignet.)

Die sich ergebende Schar $MM(\lambda)$ hat immer mindestens einen Newtonschen Grenzwert, nämlich den leeren Raum: dies erreicht man, indem man die in (a) gewählten λ-abhängigen Größen hinreichend schnell gegen ihre Minkowski-Werte streben läßt. Ob ein nicht-trivialer Grenzwert möglich ist, kann man anhand der in dieser Arbeit angegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen fallweise untersuchen.

4. Die relativistische Erweiterung Newtonscher Lösungen

Vorgegeben sei eine Newtonsche Lösung *NL*. Ziel der relativistischen Erweiterung von *NL* ist die Konstruktion einer Schar $L(\lambda)$ von Lösungen der Rahmentheorie, $\lambda \in (0, c^{-2}]$, deren Newtonscher Grenzwert existiert und gleich *NL* ist. (Da ich den Newtonschen Grenzwert im Abschnitt 3 nur für λ-abhängige Felder auf einer einzigen Mannigfaltigkeit definiert habe, kann ich auch nur Scharen L betrachten, die dieselbe Trägermannigfaltigkeit haben wie *NL*. Das sei im folgenden stets vorausgesetzt.)

Das eben genannte Ziel ist leider erstens im allgemeinen nicht erreichbar, und zweitens nicht genug. Nicht erreichbar ist die Konstruktion der Schar: man wird sich meistens mit einer näherungsweisen Darstellung zufrieden geben müssen. Und nicht genug ist die Forderung, daß die Schar mit der vorgegebenen Newtonschen Lösung nur dadurch verknüpft sein soll, daß der Grenzwert gleich *NL* zu sein hat. Denn nach den Erfahrungen im Abschnitt 3 ist zu erwarten, daß es viele Scharen mit demselben Newtonschen Grenzwert gibt, die jedoch bei $\lambda > 0$ drastisch verschiedene Situationen beschreiben können. Also muß ich präzisieren: das Ziel der relativistischen Erweiterung von *NL* ist es, die Existenz einer Schar $\big(L(\lambda)\big)_{\lambda \in (0, c^{-2}]}$ von Lösungen der Rahmentheorie sicherzustellen, die zumindest näherungsweise bestimmt werden kann, als Newtonschen Grenzwert *NL* besitzt, und für jedes feste λ eine zu *NL* möglichst ähnliche physikalische Situation beschreibt.

Die einfachste Art der näherungsweisen Bestimmung ist eine Entwicklung nach Potenzen von λ. Unter diesem Gesichtspunkt kann man in aufsteigender Strenge drei zusätzliche Forderungen an L stellen:

(a) L ist bei $\lambda = 0$ nach λ entwickelbar, so daß man Näherungen durch Polynome in λ ermitteln kann.
(b) L ist darstellbar als eine konvergente Reihe in λ, d. h. man kann L beliebig genau annähern.
(c) Die Konvergenz in (b) ist „schnell", so daß man zu vorgegebener Genauigkeit nur wenige Terme der Reihe zu bestimmen braucht.

Der etwas schwammig formulierte Punkt (c) ist in Zusammenhang zu sehen mit der Forderung, daß die Schar L für jedes feste λ möglichst ähnlich zu *NL* sein soll. Letzteres wird man präzisieren anhand gerade der beobachtbaren Größen, an denen man interessiert ist, und genau für diese wird man sich auch eine schnelle Konvergenz wünschen. Die positive Seite dieser Verbindung ist, daß man erwarten kann, daß schnelle Konvergenz bereits aus der Ähnlichkeit folgt: wenn ich eine Funktion $f(x)$ um $x = 0$ entwickele, um einen Funktionswert $f(x_1)$ zu bestimmen, wobei ich schon weiß, daß f zwischen 0 und x_1 keinen großen Abweichungen unterworfen ist, dann wird diese Entwicklung in der Regel auch schnell konvergieren (sofern sie überhaupt konvergiert). Auf der negativen Seite glaube ich nicht, daß man eine ausreichend starke Definition von „möglichst ähnlich" geben kann, ohne Bezug zu nehmen auf spezielle Eigenschaften von *NL*. Für eine Anwendung ist man sowieso zuallererst an *den* Eigenschaften von *NL* interessiert, in denen es sich von anderen Lösungen unterscheidet, sonst hätte man sich nicht gerade diese Newtonsche Lösung ausgesucht. Daher werde ich in diesem allgemeinen Rahmen auf die Betrachtung von (c) verzichten. Auch auf Punkt (b) will ich hier nicht näher eingehen, denn die Frage der Konvergenz behandelt man besser bei der Herleitung von Restgliedabschätzungen, die für praktische Zwecke erheblich wichtiger sind als die reine Tatsache der Konvergenz. Mir erscheint letzteres auch weder notwendig noch hinreichend für die Brauchbarkeit einer Entwicklung.

Damit bleibt nur (a). Mit dem Satz von Taylor erhält man die Entwickelbarkeit in Potenzen von λ aus der Differenzierbarkeit nach λ, und man bekommt auf diesem Wege auch Ausdrücke für die Restglieder (ob man sie gebrauchen kann, ist eine andere Frage). Man muß also eine Schar L suchen, die nach λ hinreichend oft differenzierbar ist. Dazu muß man wissen, welche der eine Schar eindeutig festlegenden Angaben für die Differenzierbarkeit nach λ verantwortlich sind.

Die Schar L wird natürlich dadurch eindeutig charakterisiert, daß man jedes $L(\lambda)$ einzeln fixiert. Diese Festlegung ist bei Lösungen partieller Differentialgleichungen aber nicht ganz einfach, denn oft ist die Menge der Lösungen in einem gegebenen Funktionenraum ein sehr kompliziertes Gebilde. Man versucht daher, die Lösungen bijektiv abzubilden auf eine einfacher strukturierte Menge, am liebsten auf einen ganzen Funktionenraum. Eine dafür bewährte Methode ist die Charakterisierung von Lösungen durch Werte, die sie auf ausgewählten Teilmengen ihres Definitionsbereiches annehmen. Die durch Einschränkung auf diese Teilmengen entstehenden Funktionen bezeichnet man als Daten, und man muß dann beweisen, daß zu jedem Datum genau eine Lösung der Gleichungen gehört (die andere Richtung — Lösungen zu Daten — ist bei dieser Formulierung trivial). Das ist der Weg, der im folgenden beschritten wird, und zwar durch Stellen eines sogenannten raumartigen oder Cauchyschen Anfangswertproblemes, bei dem man als Träger der Daten eine raumartige Hyperfläche der Mannigfaltigkeit wählt. Die Differenzierbarkeit der Schar soll dann aus geeignet gewählten Eigenschaften der Anfangsdaten folgen.

4.1. Der Ausgangspunkt

4.1.1. Wahl der Variablen

Die Feldgleichungen der Rahmentheorie sind tensoriell und damit vom Koordinatensystem unabhängig. Dies hat zur Folge, daß die Lösungen als Funktionen von Koordinaten nur bis auf Diffeomorphismen bestimmt sein können. Wenn man Eindeutigkeit der Komponenten der Lösung erzielen möchte, muß man daher Zusatzforderungen an die Beziehung zwischen Lösung und Koordinatensystem stellen. Im allgemeinen Fall hat sich dafür die sogenannte harmonische oder De Donder Eichung [14] als sinnvoll erwiesen. Dabei stellt man an die Koordinaten $x^\mu\colon M \to \mathbb{R}$ die Forderung, daß sie Lösungen der Wellengleichung sein sollen:

$$\Box\, x^\mu = 0, \qquad \Box\, \varphi := h^{\alpha\beta}\varphi_{;\alpha\beta}. \tag{1}$$

Bei $\lambda \neq 0$ kann man eine metrische Tensordichte definieren,

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} := \sqrt{g}\, h^{\alpha\beta}, \qquad g := \left|\det\left(h^{\mu\nu}\right)\right|^{-1}, \tag{2}$$

mit der diese Bedingung besonders einfach wird:

$$0 = \Box\, x^\mu = -h^{\sigma\tau}\Gamma^\mu_{\sigma\tau} = \tfrac{1}{\sqrt{g}}\, \mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} \iff \mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{3}$$

Aus diesem Grund empfiehlt es sich, als die unabhängigen Variablen harmonische Koordinaten und als abhängige Variable die metrische Tensordichte zu wählen.

Die Tensordichte $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ hat aber — in beliebigen Koordinaten — die höchst unerfreuliche Eigenschaft, daß sie für alle Scharen mit Newtonschem Grenzwert wie $|\lambda|^{-1/2}$ divergiert, und somit als Variable bei $\lambda = 0$ unbrauchbar ist. Ich folge daher einem von J. Ehlers eingeschlagenen Weg und definiere für $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{U}^{\alpha\beta} := \frac{1}{4\varepsilon^3}\left(\mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \underset{0}{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta}\right), \qquad U := \mathfrak{U}^{tt}, \quad W^a := \mathfrak{U}^{ta}, \quad Z^{ab} := \mathfrak{U}^{ab}, \\ &\varepsilon := \sqrt{\lambda}, \qquad \left(\underset{0}{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}\right) := \operatorname{diag}\left(-\varepsilon, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

$\underset{0}{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}$ ist die metrische Tensordichte des Minkowski-Raumes in den orthonormalen Koordinaten (t, x^i). Die $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$ haben auf jeden Fall dann Grenzwerte für $\lambda \to 0$, wenn die $\mathfrak{g}^{\mu\nu}(\lambda)$ in den gewählten Koordinaten hinreichend schnell gegen $\underset{0}{\mathfrak{g}}^{\mu\nu}$ konvergieren. Das ist aber natürlich nicht bei jeder Lösungsschar mit Newtonschem Grenzwert gegeben, und es ist zudem vom Koordinatensystem abhängig.

Aus diesem Grund erhält man aber umgekehrt stärkere Aussagen über den Newtonschen Grenzwert als generell möglich: jede Lösungsschar

$$h^{\alpha\beta}(\lambda) = \tfrac{1}{\sqrt{g}}\, \mathfrak{g}^{\alpha\beta}, \qquad g = \left|\det\left(\mathfrak{g}^{\mu\nu}\right)\right|, \qquad \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \underset{0}{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta} + 4\varepsilon^3\mathfrak{U}^{\alpha\beta}, \tag{5}$$

für die die Grenzwerte von $\mathfrak{U}^{\mu\nu}$, $\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\sigma}$ und $\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\sigma\tau}$ existieren und mit den Ableitungen vertauschen, besitzt einen Newtonschen Grenzwert, und zwar:

$$\big(\underset{0}{g}_{\mu\nu}\big) = \mathrm{diag}\,\big(1,0,0,0\big), \qquad \big(\underset{0}{h}^{\alpha\beta}\big) = \mathrm{diag}\,\big(0,1,1,1\big), \qquad \underset{0}{\Gamma}{}^{\mu}_{\sigma\tau} = \delta^{\mu a}\delta^t_\sigma\delta^t_\tau\,\underset{0}{U}{}_{,a}. \tag{6}$$

Dieser Grenzwert hat die besonderen Eigenschaften, daß er von vornherein in Galilei-Koordinaten gegeben ist (und Galilei-Koordinaten sind harmonisch im Sinne von (1)), und daß er kein Coriolisfeld enthält. Dies sind wünschenswerte Einschränkungen, die auf die übliche Formulierung der Newtonschen Gravitationstheorie führen. Darüber hinaus zeigt das Auftreten von $\underset{0}{U}$, daß die Wahl von $\mathfrak{U}^{\mu\nu}$ als Variable den Grenzwert nicht trivialisiert. Für die relativistische Erweiterung einer gegebenen Newtonschen Lösung *NL* folgt aus dieser Variablenwahl, daß man sich beschränkt auf solche *NL*, die in angepaßten Koordinaten gegeben sind und kein Coriolisfeld aufweisen.

Soweit zur Metrik. Als ein spezielles Materiemodell sei jetzt noch der Materietensor einer idealen Flüssigkeit angegeben:

$$T^{\alpha\beta} = (\varrho + \lambda p)U^\alpha U^\beta + p h^{\alpha\beta}, \qquad g(U,U) = 1, \qquad p = z(\lambda, \varrho). \tag{7}$$

ϱ ist die Dichte, p der Druck (beide im Ruhesystem), U die Vierergeschwindigkeit des Strömungsfeldes, und die letzte Beziehung bezeichnet man in der AR als Zustandsgleichung. Als Variable wähle ich hier die Dichte ϱ und die Funktionen $v^a := U^a/U^t$ aus der Vierergeschwindigkeit.

Der Anhang enthält λ-Entwicklungen einiger interessanter Tensoren für diese Wahl der Variablen. Daran kann man auch sehen, was im Newtonschen Grenzwert übrigbleibt.

4.1.2. Die Gleichungen

Für das raumartige Anfangswertproblem ist es angebracht, die Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T^{\bullet\bullet}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}T^{\sigma\bullet}_{\;\;\sigma}\, g_{\mu\nu})$$

bei $\lambda > 0$ umzuschreiben in die Form mit dem Einstein-Tensor:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi G\lambda^2\, T^{\alpha\beta}, \qquad G^{\alpha\beta} := h^{\alpha\mu}h^{\beta\nu}(R_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2\lambda}R^{\sigma}_{\bullet\sigma}\, g_{\mu\nu}). \tag{8}$$

Die metrische Tensordichte $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ geht folgendermaßen in $G^{\alpha\beta}$ ein:

$$\begin{aligned}
G^{\alpha\beta} &= \tfrac{1}{2g}\,\left(\overline{H}^{\alpha\beta} + \overline{Y}^{\alpha\beta}\right),\\
\overline{H}^{\alpha\beta} &:= \mathfrak{g}^{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} - 2\mathfrak{g}^{\mu(\alpha}\mathfrak{g}^{\beta)\nu}{}_{,\mu\nu} + \mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}, \qquad \overline{Y}^{\alpha\beta} := \bar{A}^{\alpha\beta} + \overline{B}^{\alpha\beta} + \overline{C}^{\alpha\beta},\\
\bar{A}^{\alpha\beta} &:= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_{\mu\nu}\mathfrak{g}_{\sigma\tau} - \mathfrak{g}_{\tau\mu}\mathfrak{g}_{\sigma\nu}\right)\left(\mathfrak{g}^{\alpha\eta}\mathfrak{g}^{\beta\kappa} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\eta\kappa}\right)\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\eta}\mathfrak{g}^{\sigma\tau}{}_{,\kappa},\\
\overline{B}^{\alpha\beta} &:= \mathfrak{g}_{\mu\nu}\left(2\mathfrak{g}^{\eta(\alpha}\mathfrak{g}^{\beta)\nu}{}_{,\kappa}\mathfrak{g}^{\mu\kappa}{}_{,\eta} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{g}^{\mu\sigma}{}_{,\tau}\mathfrak{g}^{\nu\tau}{}_{,\sigma} - \mathfrak{g}^{\sigma\tau}\mathfrak{g}^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}\mathfrak{g}^{\beta\nu}{}_{,\tau}\right),\\
\overline{C}^{\alpha\beta} &:= \mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{,\mu}\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \mathfrak{g}^{\alpha\mu}{}_{,\nu}\mathfrak{g}^{\beta\nu}{}_{,\mu}, \qquad \left(\mathfrak{g}_{\mu\nu}\right) := \left(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

(Siehe z. B. Misner, Thorne und Wheeler [15], §20.3. $\overline{H}^{\alpha\beta}$, $\overline{Y}^{\alpha\beta}$, usw., sind natürlich keine tensoriellen Größen.) Der Vorteil harmonischer Koordinaten ist, daß darin vom Hauptteil, $\overline{H}^{\alpha\beta}$, nur der erste Term überbleibt.

Die Gleichungen (8) sind aber für unsere Zwecke nicht gut genug: faßt man sie auf als Funktionen von λ, $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$, den Ableitungen von $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$, und den Materievariablen, dann erhält man daraus als Grenzwert des Gleichungssystems bei $\lambda \to 0$ die nicht überragend tiefsinnige Beziehung $0 = 0$. Man muß durch eine geeignete Potenz von λ dividieren, um etwas Ausdrucksstärkeres zu bekommen. Ich multipliziere mit $g/2\lambda$ und gelange so zu dem folgenden System:

$$
\begin{aligned}
&E^{\alpha\beta}(\lambda, \mathfrak{U}^{\mu\nu}, \mathfrak{U}^{\sigma\tau}{}_{,\eta}, \ldots) := H^{\alpha\beta} + Y^{\alpha\beta} - 4\pi G\,\lambda g\,T^{\alpha\beta} = 0, \qquad (9)\\
&H^{\alpha\beta} := \tfrac{1}{4\lambda}\,\overline{H}^{\alpha\beta} = \varepsilon\mathfrak{g}^{\mu\nu}\mathfrak{U}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} - 2\varepsilon\mathfrak{g}^{\mu(\alpha}\mathfrak{U}^{\beta)\nu}{}_{,\mu\nu} + \varepsilon\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu},\\
&Y^{\alpha\beta} := A^{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta} + C^{\alpha\beta},\\
&A^{\alpha\beta} := \tfrac{1}{4\lambda}\bar{A}^{\alpha\beta} = 2\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{g}_{\mu\nu}\varepsilon\mathfrak{g}_{\sigma\tau} - \varepsilon\mathfrak{g}_{\tau\mu}\varepsilon\mathfrak{g}_{\sigma\nu}\right)\left(\varepsilon\mathfrak{g}^{\alpha\eta}\varepsilon\mathfrak{g}^{\beta\kappa} - \tfrac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\varepsilon\mathfrak{g}^{\eta\kappa}\right)\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\eta}\mathfrak{U}^{\sigma\tau}{}_{,\kappa},\\
&B^{\alpha\beta} := \tfrac{1}{4\lambda}\,\overline{B}^{\alpha\beta} = 4\lambda\varepsilon\mathfrak{g}_{\mu\nu}\left(2\varepsilon\mathfrak{g}^{\eta(\alpha}\mathfrak{U}^{\beta)\nu}{}_{,\kappa}\mathfrak{U}^{\mu\kappa}{}_{,\eta} - \tfrac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{U}^{\mu\sigma}{}_{,\tau}\mathfrak{U}^{\nu\tau}{}_{,\sigma} - \varepsilon\mathfrak{g}^{\sigma\tau}\mathfrak{U}^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}\mathfrak{U}^{\beta\nu}{}_{,\tau}\right),\\
&C^{\alpha\beta} := \tfrac{1}{4\lambda}\overline{C}^{\alpha\beta} = 4\lambda^2\left(\mathfrak{U}^{\alpha\beta}{}_{,\mu}\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \mathfrak{U}^{\alpha\mu}{}_{,\nu}\mathfrak{U}^{\beta\nu}{}_{,\mu}\right).
\end{aligned}
$$

(In dieser Form wurden die Gleichungen zuerst von J. Ehlers aufgestellt.) Damit diese Gleichungen auch für $\lambda = 0$ als wohldefiniert erkennbar sind, vereinbare ich, daß die Ausdrücke $\varepsilon\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$, $\varepsilon\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ und λg jeweils als Einheit zu sehen sind, d. h. bevor man $\lambda = 0$ setzt, sind diese Größen auf die $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$ zurückzuführen. Die Bedingung für harmonische Koordinaten, $\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, dividiert man durch ε^3 und erhält:

$$\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \iff \dot{U} = -W^a{}_{,a}, \quad \dot{W}^a = -Z^{ab}{}_{,b}. \qquad (10)$$

(Der Punkt soll natürlich die Ableitung nach t bezeichnen.) Zu diesen Beziehungen treten noch die Bewegungsgleichungen,

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \qquad (11)$$

die bekanntlich bei $\lambda > 0$ und ausreichender Differenzierbarkeit aus (9) folgen.

Das aus (9), (10) und (11) bestehende System hat die Eigenschaft, daß es nur noch gerade Potenzen von ε enthält, so daß wir wieder zu λ als Scharparameter zurückkehren können. Viel wichtiger ist aber sein Grenzwert für $\lambda \to 0$:

$$
\begin{aligned}
&\Delta U = 4\pi G\varrho, \qquad \varrho := T^{tt}|_{\lambda=0}, \qquad (*)\\
&\Delta W^a = 4\pi G j^a, \qquad j^a := T^{ta}|_{\lambda=0},\\
&\Delta Z^{ab} = 4\pi G\,S^{ab} + U_{,a}U_{,b} - \tfrac{1}{2}|\operatorname{grad} U|^2\delta^{ab}, \qquad S^{ab} := T^{ab}|_{\lambda=0},\\
&\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0,\\
&\varrho_{,t} + j^b{}_{,b} = 0, \qquad j^a{}_{,t} + S^{ab}{}_{,b} = -\varrho U_{,a}. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Die mit $(*)$ bezeichneten Gleichungen bilden die Newtonsche Gravitationstheorie, die anderen sind zusätzliche Forderungen. Man sieht, daß die Funktionen W^a und Z^{ab} zwar nicht mehr im Newtonschen Gravitationsfeld (6) auftreten, trotzdem aber noch Feldgleichungen unterworfen sind.

Heißt das nun, daß die Gleichungen bei $\lambda = 0$ nicht die Newtonsche Gravitationstheorie beschreiben? Auf jeden Fall ist klar, daß eine Lösung dieser Gleichungen insbesondere auch eine Lösung der Newtonschen Theorie ergibt, indem man die Funktionen W^a und Z^{ab} einfach wegläßt. Sei umgekehrt eine Lösung der Newtonschen Gravitationstheorie gegeben, d.h. die mit $(*)$ bezeichneten Gleichungen seien erfüllt. Wenn man die Funktionenräume so gewählt hat, daß der Laplace-Operator surjektiv ist, dann kann man immer Lösungen der Poisson-Gleichungen für W^a und Z^{ab} finden, denn die rechten Seiten sind vorgegeben. Wie aber steht es mit der Harmonizität? Dazu setze man einmal die Potentialgleichungen ein in die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \varrho_{,t} + j^b{}_{,b} = \tfrac{1}{4\pi G}\big((\Delta U)_{,t} + (\Delta W^b)_{,b}\big) = \tfrac{1}{4\pi G}\Delta \mathfrak{U}^{t\mu}{}_{,\mu}, \\ 0 &= j^a{}_{,t} + S^{ab}{}_{,b} + \varrho U_{,a} = \tfrac{1}{4\pi G}\big((\Delta W^a)_{,t} + (\Delta Z^{ab})_{,b}\big) = \tfrac{1}{4\pi G}\Delta \mathfrak{U}^{a\nu}{}_{,\nu}, \end{aligned}$$

vorausgesetzt die Ableitungen vertauschen. Wenn der Laplace-Operator also hier injektiv ist, folgt diese verschärfte Harmonizität bereits aus den übrigen Gleichungen! Das bedeutet, daß man zu einer Newtonschen Lösung immer eine Lösung des Systems für $\lambda = 0$ konstruieren kann, sofern die verwendeten Funktionenräume auf den Laplace-Operator abgestimmt sind. In diesem Sinne ist das $(\lambda = 0)$-System äquivalent zu den Gleichungen der Newtonschen Gravitationstheorie.

Ich möchte an dieser Stelle besonders betonen, daß der Wahl des Gleichungssystems eine entscheidende Bedeutung zukommt: bei $\lambda > 0$ sind zwar alle sinnvollen Formulierungen zueinander äquivalent, ihre Grenzwerte für $\lambda \to 0$ dagegen werden es in der Regel nicht sein. Der Vorteil der hier verwendeten Form ist es, daß man im Grenzwert ein zu den Newtonschen Gleichungen physikalisch äquivalentes System bekommt, das aber trotzdem alle auftretenden Variablen festlegt. Keine der Funktionen wird also unbestimmt, sie haben bloß zum Teil keine Auswirkungen mehr auf das physikalische Geschehen.

4.1.3. Stellen des Anfangswertproblemes

Unsere Zeitkoordinate t definiert eine Foliation der Raumzeit durch raumartige Hyperflächen Σ_t. Auf einer von diesen (o.B.d.A. wähle ich Σ_0) sollen Daten vorgegeben werden, aus denen man eindeutig eine Lösung von (9,10,11) bestimmen kann.

Da wir es mit einem Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung zu tun haben, würde man unter den Anfangsdaten die Metrik und ihre ersten Zeit-Ableitungen erwarten (hier also $\mathfrak{U}^{\mu\nu}$ und $\dot{\mathfrak{U}}^{\mu\nu}$). Leider sind partielle Differentialgleichungen nicht so einfach zu überlisten: es ist seit langem bekannt, daß die Gleichungen

$$G^{t\alpha} = 8\pi G \lambda^2\, T^{t\alpha}$$

in geeignet gewählten Koordinaten die $\ddot{\mathfrak{U}}^{\mu\nu}$ gar nicht enthalten, so daß sie vier Beziehungen unter den beabsichtigten Anfangsdaten ergeben. Daher folge ich J. Ehlers und nehme den folgenden Weg von den Daten zur vollständigen Lösung:

(a) Wähle als freie Daten auf Σ_0 die Funktionen Z^{ab}, $\dot{Z}^{ab}$, und geeignete Variable für die Materie (bei einer idealen Flüssigkeit z.B. ϱ und v^a). Eliminiere in (9) bei $H^{\alpha\beta}$ alle Terme $\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ („harmonisch reduzierte Gleichungen").

(b) Betrachte den Teil $E^{t\alpha} = 0$ von (9) auf Σ_0, ersetze sämtliche Zeitableitungen von U und W^a durch (10), und bestimme daraus die Funktionen U und W^a auf Σ_0 (Zwangsbedingungen). Eventuell muß man auch noch weitere Materievariable ermitteln (bei einer idealen Flüssigkeit den Druck p aus der Zustandsgleichung).

(c) Benutze die Gleichung (10), um zu einem vollständigen Satz von Anfangsdaten auf Σ_0 zu gelangen: ($\mathfrak{U}^{\alpha\beta}, \dot{\mathfrak{U}}^{\mu\nu}$, Materiedaten). (Bei einer idealen Flüssigkeit sind die Materiedaten (ϱ, v^a, p).)

(d) Löse die harmonisch reduzierten Gleichungen (9) und (11) (Zeitentwicklungsgleichungen) mit den in (c) bestimmten Daten auf einer möglichst großen Umgebung von Σ_0. Unter Umständen muß man noch Gleichungen für die Materie hinzufügen (bei einer idealen Flüssigkeit die Zustandsgleichung).

(e) Zeige, daß die Zwangsbedingungen und die Harmonizität (10) unter der Zeitentwicklung erhalten bleiben. (Dazu benutzt man die kontrahierte Bianchi-Identität.)

Die Punkte (b), (d) und (e) sind die wichtigsten: man muß dort Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Systems partieller Differentialgleichungen beweisen. In dieser Arbeit ist das nur für den Punkt (b) gelungen.

Happiness is a Banach space [16]

4.2. Mathematische Präliminarien

Dieser Abschnitt soll die verwendeten Funktionenräume vorstellen und eine Reihe von Resultaten aufzählen, die im folgenden gebraucht werden.

4.2.1. Funktionenräume

Die gesuchten Funktionenräume müssen dem Laplace-Operator einen angemessenen Lebensraum bieten, d.h. er sollte definiert und invertierbar sein. M. Cantor [17] zeigte als erster, daß Δ zwischen gewissen gewichteten Sobolev-Räumen ein linearer Homöomorphismus ist. Diese stärkere Eigenschaft wird noch aus einem später zu erläuterndem Grund wichtig werden, so daß ich diese Räume verwenden will.

Für die Definition und die wesentlichen Eigenschaften der gewichteten Sobolev-Räume beziehe ich mich auf die Arbeit von Y. Choquet-Bruhat und D. Christodoulou [18]. Allerdings vereinfache ich mir die Angelegenheit erheblich, indem ich von vornherein festlege, daß Σ_0

mit der von $\underset{0}{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta}$ induzierten Metrik isometrisch zum Euklidischen $\mathbb{R}^3$ sein soll. Dies ist eine weitere Einschränkung an die Klasse der Newtonschen Lösungen, die man relativistisch erweitern möchte: nur solche sind zugelassen, deren Zeitschichten diese Eigenschaft bezüglich der Newtonschen Raummetrik haben. Dann sei der gewichtete Sobolev-Raum $H_{s,\delta} := H_{s,\delta}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$, $s \in \mathbb{N}_0$, $\delta \in \mathbb{R}$, definiert als die Menge der L^2-meßbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, deren Distributionsableitungen bis einschließlich der Ordnung s L^2-meßbar sind, und für die die folgende Norm existiert:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{s,\delta} &:= \sqrt{\sum_{j=0}^{s} \left(\left\|\sigma^{j+\delta}|D^j f|\right\|_{L^2}\right)^2}, \qquad \sigma := \sqrt{1+|\vec{x}|^2}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \\
|D^j f| &:= \sqrt{\sum_{\alpha,|\alpha|=j} |D^\alpha f|^2}, \qquad \alpha \text{ Multiindex}, \quad D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x\, \partial^{\alpha_2} y\, \partial^{\alpha_3} z}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

($\|\ldots\|_{L^2}$ ist die Norm des $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.) Mit dieser Norm ist $H_{s,\delta}$ ein Banachraum. Die C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger, C^∞_k, liegen dicht in $H_{s,\delta}$, so daß man die gewichteten Sobolev-Räume auch aus C^∞_k durch Vervollständigung unter diesen Normen erhalten kann.

Der Gewichtsfaktor σ sorgt dafür, daß die Funktionen in $H_{s,\delta}$ einschließlich ihrer Ableitungen im räumlich Unendlichen ein durch δ näher spezifiziertes Abklingverhalten aufweisen.

Ich werde die folgenden Eigenschaften von $H_{s,\delta}$ benötigen:

(a) Die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\colon H_{s,\delta} \to H_{s-1,\delta+1}, \quad s \geq 1, \tag{13}$$

ist stetig. (Beweis durch Abschätzen: $\|f_{,a}\|_{s-1,\delta+1} \leq \|f\|_{s,\delta}$.)

(b) Die punktweise definierte Multiplikation von Funktionen ist stetig speziell für folgenden Definitions- und Wertebereich:

$$\cdot : H_{s-1,\delta+1} \times H_{s-1,\delta+1} \to H_{s-2,\delta+2}, \quad s \geq 2, \quad \delta > -\tfrac{3}{2}. \tag{14}$$

(Dies ist ein Spezialfall von Lemma 2.5 in [18].)

(c) Der Laplace-Operator

$$\Delta\colon H_{s,\delta} \to H_{s-2,\delta+2}, \qquad s \geq 2, \quad -\tfrac{3}{2} < \delta < -\tfrac{1}{2} \tag{15}$$

ist ein linearer Homöomorphismus ([18], Satz 6.6).

Ferner definiere ich die Mengen

$$K_{s,\delta} := \{\, f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \mid \exists\, a \in \mathbb{R}\colon f - a \in H_{s,\delta} \,\}, \qquad 2 \leq s \in \mathbb{N}, \quad -\tfrac{3}{2} < \delta \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Jedes Element von $K_{s,\delta}$ ist speziell eine stetige und beschränkte Funktion (sogar C^{s-2}, siehe [18], Lemma 2.4). Die Konstante a ist eindeutig durch f festgelegt, denn sonst würde

$a - a' \in H_{s,\delta}$ gelten mit $a - a' \neq 0$, aber das ergibt wegen $\delta \geq -\frac{3}{2}$ eine divergierende Norm und somit einen Widerspruch. Folglich ist $K_{s,\delta}$ eine direkte Summe, $K_{s,\delta} = \mathbb{R} \oplus H_{s,\delta}$, und mit der Norm $\|f\| := \sqrt{a^2 + \|f - a\|^2_{s,\delta}}$ wird es zu einem Banachraum, dem Produkt von $\mathbb{R}$ und $H_{s,\delta}$. Es gilt:

(d) Die punktweise definierte Multiplikation von Funktionen ist stetig insbesondere in folgenden Fällen:

$$\cdot : K_{s,\delta} \times K_{s,\delta} \to K_{s,\delta} \tag{17}$$

$$\cdot : K_{s,\delta} \times H_{s-2,\delta+2} \to H_{s-2,\delta+2} \tag{18}$$

(Dies sind triviale Erweiterungen von Spezialfällen des Lemmas 2.5 in [18].) Aus der ersten Aussage folgt, daß es sich bei $K_{s,\delta}$ mit dieser Multiplikation um eine Banachalgebra handelt, und sie hat sogar ein Einselement.

4.2.2. Differentialrechnung in Banachräumen

Für die Differentialrechnung beziehe ich mich in erster Linie auf J. Dieudonné [19], wo der Leser die grundlegenden Definitionen und Sätze nachschlagen kann. Häufig gebraucht werden wird die folgende Aussage:

([19] (8.12.9)) Seien E, F und G Banachräume, $f\colon E \times F \to G$ bilinear und stetig. Dann ist f aus $C^\infty(E \times F, G)$.

Und von entscheidender Bedeutung wird der folgende Satz sein:

Satz über implizite Funktionen. *Seien E, F, G Banachräume und $A \subset E \times F$ offen. Gegeben seien $f\colon A \to G$ und $(x_0, y_0) \in A$ mit den Eigenschaften:*

— *$f \in C^k(A, G)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f(x_0, y_0) = 0$.*

— *$D_2 f(x_0, y_0)\colon F \to G$ ist ein Homöomorphismus. (D_2 soll die partielle Ableitung nach dem zweiten Argument bezeichnen.)*

$\Longrightarrow$ *Es gibt eine offene Umgebung $U \subset E$ von x_0, für die auf jeder offenen zusammenhängenden Teilumgebung $U' \subset U$ von x_0 genau eine Funktion $g\colon U' \to F$ existiert mit folgenden Eigenschaften:*

$$g \in C^0(U', F), \qquad g(x_0) = y_0, \qquad \forall x \in U'\colon \big(x, g(x)\big) \in A \text{ und } f\big(x, g(x)\big) = 0.$$

Dieses g gehört zu $C^k(U', F)$.

([19], (10.2.1) und (10.2.3).) Die Einführung zweier Umgebungen, U und U', in der Aussage des Satzes ist notwendig, damit man sieht, daß die Eindeutigkeit nicht dadurch zustande kommt, daß man den Definitionsbereich von g so weit ausdehnt, daß den nur lokal existierenden Lösungen die Puste ausgeht. Die Stetigkeit von g schließlich muß gefordert werden, damit die Bedingung $g(x_0) = y_0$ die Lösung eindeutig festlegen kann.

Ferner benötige ich noch ein paar Aussagen speziell zur Differentialrechnung in $K_{s,\delta}$ (die Gleichungsnummern stehen hier — *variatio delectat* — einmal links):

(19) Sei $\mathrm{Inv}(K_{s,\delta}) := \{\, a \in K_{s,\delta} \mid \exists\, b \in K_{s,\delta}\colon a \cdot b = 1 \,\}$ die Menge all der Elemente von $K_{s,\delta}$, die bezüglich der Multiplikation ein Inverses besitzen. $\mathrm{Inv}(K_{s,\delta})$ ist offen in $K_{s,\delta}$, und die Abbildung $a \mapsto a^{-1}$ gehört zu $C^\infty(\mathrm{Inv}(K_{s,\delta}), \mathrm{Inv}(K_{s,\delta}))$.

(20) Sei $W := \{\, a \in K_{s,\delta} \mid \|a - 1\| < 1 \,\} \subset \mathrm{Inv}(K_{s,\delta})$. Die punktweise definierte Abbildung $a \mapsto \sqrt{a}$ gehört zu $C^\infty(W, W)$.

Die Aussage (19) gilt in jeder Banachalgebra mit Einselement für die Menge der beidseitigen Inversen. (Dies kann man genauso beweisen, wie es in [19] (8.3.2) und (8.12.11) speziell für die Banachalgebra linearer stetiger Abbildungen auf einem Banachraum geschieht. Oder siehe L. Loomis und S. Sternberg [20], Abschnitt 4.8.) Für (20) geht man aus von der Tatsache, daß auf W die binomischen Reihen konvergieren (das ist rückführbar auf die absolute Konvergenz dieser Reihen in $\mathbb{R}$, siehe [19] (5.3.2)). Die Differenzierbarkeit findet man in [20], Satz 4.8.5. Ferner wurde zur punktweisen Definition von $\sqrt{a}$ benötigt, daß ein $a \in W$ auf dem gesamten $\mathbb{R}^3$ nichtnegativ ist, und das erhält man so:

— Für jedes $a \in \mathrm{Inv}(K_{s,\delta})$ existiert ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft:

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3\colon |a(\vec{x})| \geq c \tag{21}$$

Beweis: durch Widerspruch mit der Tatsache, daß a^{-1} beschränkt sein muß. ■

— Sei nun $a \in W$, $a = a_0 + a_1$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1 \in H_{s,\delta}$. Dann folgt:

$$1 > \|a - 1\| = \sqrt{|a_0 - 1|^2 + \|a_1\|^2_{s,\delta}} \geq |a_0 - 1|\,.$$

Also gilt $a_0 > 0$, aber im Unendlichen muß a gegen a_0 gehen. Mit dem ersten Teil und der Stetigkeit von a folgt, daß $a(\vec{x}) \geq c$ gilt.

4.3. Lösung der Zwangsbedingungen

Die Zwangsbedingungen $E^{t\alpha} = 0$ lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta U - 4\pi G\,\lambda g\,T^{tt} + Y^{tt} - \lambda Z^{cd}{}_{,cd} + 4\lambda^2 \left(Z^{cd} U_{,cd} - 2W^c{}_{,cd} W^d + U Z^{cd}{}_{,cd}\right), \\ 0 &= \Delta W^a - 4\pi G\,\lambda g\,T^{ta} + Y^{ta} + \lambda \dot{Z}^{ac}{}_{,c} + 4\lambda^2 \left(Z^{cd} W^a{}_{,cd} - 2Z^{ac}{}_{,cd} W^d - U \dot{Z}^{ac}{}_{,c}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Ich schreibe dieses System als:

$$\begin{aligned} &f(x, y) = 0 \qquad \text{mit } f\colon E \times F \to G, \\ &x := (\lambda, Z^{ab}, \dot{Z}^{cd}, m) \in E, \quad y := (U, W^a) \in F. \end{aligned} \tag{23}$$

Dabei soll m die Materievariablen bezeichnen. Die frei vorgebbaren Daten stehen dann in x, und y besteht aus den gesuchten Funktionen.

Auf der „Newtonschen Ebene“, d.h. für die x-Werte mit $\lambda = 0$, wird das System zu:

$$\Delta U = 4\pi G\,\varrho, \qquad \Delta\vec{W} = 4\pi G\,\vec{\jmath}.$$

Bei vorgegebenen ϱ und $\vec{\jmath}$ weiß man, wie solche Poisson-Gleichungen behandelt werden müssen, so daß (23) für $\lambda = 0$ geschlachtet werden kann. Ist es vielleicht möglich, diese Kenntnis auch für andere λ-Werte auszunutzen?

Einem Vorschlag von J. Ehlers folgend werde ich dafür den Satz über implizite Funktionen benutzen: mit ihm kann man von der Existenz einer einzelnen Lösung schließen auf eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems in einer Umgebung der bekannten Lösung. Entscheidend für die Anwendbarkeit dieses Satzes ist die Ableitung des Gleichungssystems nach den gesuchten Funktionen: diese lineare Abbildung muß ein Homöomorphismus sein. In unserem Fall erhält man für die Zwangsbedingungen unter geeigneten Annahmen:

$$D_2 f\big(x|_{\lambda=0}, y\big)(u) = \Delta u, \qquad u \in F,$$

worin $\Delta\colon F \to G$ komponentenweise auf u wirkt. Wir schließen also, daß F ein Produkt von Funktionenräumen sein muß, auf denen der Laplace-Operator ein linearer Homöomorphismus in geeignete andere Mengen ist, aus denen wir dann G konstruieren. Dies wird gerade von den gewichteten Sobolev-Räumen geleistet (diesen Hinweis verdanke ich O. Reula).

Daher wähle ich als Funktionenräume:

$$\begin{aligned} x = (\lambda, Z^{ab}, \dot{Z}^{cd}, m) \in E &:= \mathbb{R} \times (H_{s,\delta})^6 \times (H_{s-1,\delta+1})^6 \times V, \\ y = (U, W^a) \in F &:= (H_{s,\delta})^4, \\ G &:= (H_{s-2,\delta+2})^4, \qquad 2 \le s, \quad -\tfrac{3}{2} < \delta < -\tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Dabei soll V ein Banachraum für die Materievariablen m sein, den ich unspezifiziert lasse. E, F und G sind auf die übliche Weise als Produkte von Banachräumen wieder Banachräume.

Wie restriktiv ist die Einschränkung der $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$ auf $H_{s,\delta}$? Für physikalische Zwecke lohnt es sich wohl kaum, um den Grad der Differenzierbarkeit zu feilschen, dafür ist jedoch das Abfallverhalten im Unendlichen von großer Wichtigkeit. Aber das ist sehr schwach eingeschränkt, was man z.B. daran sehen kann, daß man eine Funktion wie $(1 + |\vec{x}|^2)^{-\varepsilon/2}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, noch behandeln kann (wähle $\delta < -\frac{3}{2} + \varepsilon$). Mein Eindruck ist daher, daß die Funktionenräume $H_{s,\delta}$ zu einer akzeptablen mathematischen Präzisierung führen für Raumzeiten, die im räumlich Unendlichen „gerade eben flach werden“.

Sei nun

$$\begin{aligned} d(x,y) := -1 &+ \lambda\, 4U - \lambda^2\, 4\,\mathrm{Sp}\,Z + \lambda^3\, 16(U\,\mathrm{Sp}\,Z - W^2) - \lambda^4\, 8(\mathrm{Sp}^2 Z - \mathrm{Sp}\,Z^2) \\ &+ \lambda^5\, 64\big(U\tfrac{1}{2}(\mathrm{Sp}^2 Z - \mathrm{Sp}\,Z^2) - W^2\,\mathrm{Sp}\,Z + (\vec{W}, Z\vec{W})\big) \\ &- \lambda^6\, 64\det Z + \lambda^7\, 256\big(U\det Z - (\vec{W}, \mathrm{adj}\,Z\,\vec{W})\big). \end{aligned} \tag{25}$$

Bei $\lambda \neq 0$ gilt $d(x,y) = \lambda\det(\mathfrak{g}^{\alpha\beta})$.

Lemma 1.
(a) Die Abbildungen $(x, y) \mapsto \varepsilon\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ und d sind aus $C^\infty(E \times F, K_{s,\delta})$.
(b) Die Abbildungen $(x, y) \mapsto \varepsilon\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ sind aus $C^\infty(A_1, K_{s,\delta})$, wobei

$$A_1 := \{ (x, y) \in E \times F \mid d(x, y) \in \mathrm{Inv}(K_{s,\delta}) \} \tag{26}$$

offen ist und die „Newtonsche Ebene“

$$N := \{ (x, y) \in E \times F \mid \mathrm{pr}_1 x = \lambda = 0 \} \tag{27}$$

enthält, also insbesondere nicht leer ist.

Beweis: (a) Betrachte man zunächst $(x, y) \mapsto \varepsilon\mathfrak{g}^{ta} = 4\lambda^2 W^a$. Die Abbildungen $(x, y) \mapsto \lambda$, $(x, y) \mapsto W^a$ sind C^∞, die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times H_{s,\delta} \to H_{s,\delta}$ ist bilinear, stetig und somit auch C^∞, so daß die Kettenregel ergibt, daß $(x, y) \mapsto \lambda^2 W^a$ aus $C^\infty(E \times F, H_{s,\delta})$ ist. Da die Multiplikation mit 4 daran nichts ändert, und $H_{s,\delta}$ stetig eingebettet ist in $K_{s,\delta}$, gehört folglich $(x, y) \mapsto \varepsilon\mathfrak{g}^{ta} = 4\lambda^2 W^a$ zu $C^\infty(E \times F, K_{s,\delta})$. In den Diagonaltermen wie z.B. $\varepsilon\mathfrak{g}^{tt} = -\lambda + 4\lambda^2 U$ erkennt man auf dieselbe Weise eine Summe von C^∞-Funktionen, die auch wieder in $C^\infty(E \times F, K_{s,\delta})$ liegt. Folglich gehören alle Abbildungen $(x, y) \mapsto \varepsilon\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ zu $C^\infty(E \times F, K_{s,\delta})$.

Genauso verfährt man bei d, nur tritt hier noch die Stetigkeit der bilinearen Abbildung $\cdot : K_{s,\delta} \times K_{s,\delta} \to K_{s,\delta}$ hinzu, die es einem erlaubt, die $\mathfrak{U}^{\mu\nu}$-Terme straflos miteinander zu multiplizieren.

(b) Da $\mathrm{Inv}(K_{s,\delta})$ offen ist, handelt es sich bei A_1 um das Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Abbildung d, so daß A_1 auch wieder offen ist. Die Newtonschen Werte gehören zu A_1, weil für sie $d(x, y) = -1 \in \mathrm{Inv}(K_{s,\delta})$ gilt.

Für $\varepsilon\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ gilt bei $\lambda \neq 0$:

$$\varepsilon\mathfrak{g}_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{\det(\mathfrak{g}^{\alpha\beta})} \operatorname{adj}(\mathfrak{g}^{\sigma\tau})_{\mu\nu} = \frac{\operatorname{adj}(\varepsilon\mathfrak{g}^{\sigma\tau})_{\mu\nu}}{d(x, y)}. \tag{28}$$

Nach der oben getroffenen Vereinbarung ist die letzte Form die korrekte Darstellung von $\varepsilon\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ auch bei $\lambda = 0$. Die Komponenten der adjungierten Matrix sind gebildet als Summen über Produkte der $\varepsilon\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$: das sind alles bilineare und stetige Operationen, so daß wir mit Teil (a) und der Kettenregel schließen können, daß die Abbildungen $(x, y) \mapsto \operatorname{adj}(\varepsilon\mathfrak{g}^{\sigma\tau})_{\mu\nu}$ zu $C^\infty(E \times F, K_{s,\delta})$ gehören. d ist aus $C^\infty(A_1, K_{s,\delta})$, und es bildet bei dieser Einschränkung ab auf die Menge $\mathrm{Inv}(K_{s,\delta})$, auf der die Abbildung $d \mapsto 1/d$ definiert und C^∞ ist mit Werten in $K_{s,\delta}$. Schließlich multiplizieren wir noch $1/d$ stetig und bilinear in $K_{s,\delta}$ mit $\operatorname{adj}(\varepsilon\mathfrak{g}^{\sigma\tau})_{\mu\nu}$, und gelangen so zu der Aussage, daß $(x, y) \mapsto \varepsilon\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ aus $C^\infty(A_1, K_{s,\delta})$ ist. ■

Lemma 2. *Es sei*

$$A_2 := \{\, (x,y) \in E \times F \mid -d(x,y) \in W \,\} \subset A_1. \tag{29}$$

Die Materietensor-Komponenten $T^{t\alpha}$ seien aus $C^k(A_3, H_{s-2,\delta+2})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, für eine offene Menge $A_3 \subset E \times F$, deren Durchschnitt mit der „Newtonschen Ebene“ N nicht leer ist.

$\Longrightarrow$ *A_2 ist offen, enthält N, und die Gleichungsfunktion $f\colon E \times F \to G$ der Zwangsbedingungen gehört zu $C^k(A, G)$ mit $A := A_2 \cap A_3$.*

Beweis: A_2 ist das Urbild der offenen Menge W unter der stetigen Abbildung $-d$ und somit offen. Da N von $-d$ auf $1 \in W$ abgebildet wird, ist N in A_2 enthalten.

Zum Beweis der Differenzierbarkeit betrachten wir uns die detaillierte Form der Zwangsbedingungen in Gleichung (22). Der erste Term, $\Delta\mathfrak{U}^{t\alpha}$, ist gebildet mit $\Delta\colon H_{s,\delta} \to H_{s-2,\delta+2}$, was linear und stetig ist. Also ist $(x,y) \mapsto \Delta\mathfrak{U}^{t\alpha}$ aus $C^\infty(E \times F, H_{s-2,\delta+2})$. Der nächste Summand ist $|d(x,y)|\, T^{t\alpha}$: über d wissen wir schon Bescheid, auf A_2 gilt $|d(x,y)| = -d(x,y)$, $T^{t\alpha}$ hat die notwendigen Eigenschaften nach Voraussetzung, und das Produkt $\cdot : K_{s,\delta} \times H_{s-2,\delta+2} \to H_{s-2,\delta+2}$ ist stetig und bilinear, so daß wir mit der Kettenregel sicher im Hafen $C^k(A, H_{s-2,\delta+2})$ landen.

$Y^{\alpha\beta}$ besteht aus den drei Termen $A^{\alpha\beta}$, $B^{\alpha\beta}$ und $C^{\alpha\beta}$. Betrachten wir einmal den ersten:

$$A^{\alpha\beta} = 2\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{g}_{\mu\nu}\varepsilon\mathfrak{g}_{\sigma\tau} - \varepsilon\mathfrak{g}_{\tau\mu}\varepsilon\mathfrak{g}_{\sigma\nu}\right)\left(\varepsilon\mathfrak{g}^{\alpha\eta}\varepsilon\mathfrak{g}^{\beta\kappa} - \tfrac{1}{2}\varepsilon\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\varepsilon\mathfrak{g}^{\eta\kappa}\right)\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\eta}\mathfrak{U}^{\sigma\tau}{}_{,\kappa}.$$

Die Abbildungen $(x,y) \mapsto \mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\eta}$ sind aus $C^\infty(E \times F, H_{s-1,\delta+1})$: $\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,t}$ ist entweder als $Z^{ab}{}_{,t}$ in x enthalten und somit C^∞ oder als $\mathfrak{U}^{\mu t}{}_{,t}$ über (10) als C^∞-Funktion von (x,y) gegeben, während $\mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,c}$ als Hintereinanderausführung von $(x,y) \mapsto \mathfrak{U}^{\mu\nu}$ und (13) ebenfalls C^∞ ist. Das Produkt $\cdot : H_{s-1,\delta+1} \times H_{s-1,\delta+1} \to H_{s-2,\delta+2}$ ist bilinear und stetig, so daß $(x,y) \mapsto \mathfrak{U}^{\mu\nu}{}_{,\eta}\mathfrak{U}^{\sigma\tau}{}_{,\kappa}$ aus $C^\infty(E \times F, H_{s-2,\delta+2})$ ist. Der Vorfaktor besteht aus Summen und Produkten in $K_{s,\delta}$ von Funktionen aus $C^\infty(A_1, K_{s,\delta})$, also liegt er in $C^\infty(A_1, K_{s,\delta})$. Das Produkt $\cdot : K_{s,\delta} \times H_{s-2,\delta+2} \to H_{s-2,\delta+2}$ ist bilinear und stetig, die Summation über die Indizes ist es auch, und folglich gehört $(x,y) \mapsto A^{\alpha\beta}$ zu $C^\infty(A_2, H_{s-2,\delta+2})$. Mit $B^{\alpha\beta}$ und $C^{\alpha\beta}$ verfährt man genauso, und $Y^{\alpha\beta}$ ist dann als Summe differenzierbarer Funktionen wieder in $C^\infty(A_2, H_{s-2,\delta+2})$.

Die übrigen Terme in (22) lassen sich dann auf die nunmehr reichlich bekannte Art verarbeiten. Als Beispiel betrachte man $(x,y) \mapsto \lambda^2 Z^{cd} U_{,cd}$: $(x,y) \mapsto U_{,cd}$ ist (da linear und stetig) aus $C^\infty(E \times F, H_{s-2,\delta+2})$, Z^{ab} betten wir stetig ein in $K_{s,\delta}$, $\cdot : K_{s,\delta} \times H_{s-2,\delta+2} \to H_{s-2,\delta+2}$ ist C^∞ (man könnte auch direkt $H_{s,\delta}$ statt $K_{s,\delta}$ betrachten), nach dem Summieren über die Indizes hat sich daran nichts geändert, und λ^2 verarzten wir mit der Skalarmultiplikation in $H_{s-2,\delta+2}$; Resultat: $C^\infty(E \times F, H_{s-2,\delta+2})$.

Bauen wir nun alle diese Einzelteile in $H_{s-2,\delta+2}$ zusammen, so ergibt sich, daß die vier Komponenten der Zwangsbedingungen aus $C^k(A, H_{s-2,\delta+2})$ sind, f also in $C^k(A, G)$ liegt. ■

Satz 1 (Lösung der Zwangsbedingungen). *Sei* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(a) Die Zwangsbedingungen seien gegeben in der Form:

$$\begin{aligned} & f(x, y) = 0, \\ & x = (\lambda, Z^{ab}, \dot{Z}^{cd}, m) \in E = \mathbb{R} \times (H_{s,\delta})^6 \times (H_{s-1,\delta+1})^6 \times V, \\ & y = (U, W^a) \in F = (H_{s,\delta})^4, \\ & s \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq s, \qquad \delta \in \mathbb{R}, \quad -\tfrac{3}{2} < \delta < -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

V sei ein Banachraum für die Materievariablen m.

(b) Die Materietensor-Komponenten $T^{t\alpha}$ seien aus $C^k(A_3, H_{s-2,\delta+2})$ mit einem offenen $A_3 \subset E \times F$, für das der Durchschnitt mit der „Newtonschen Ebene“ $N = \{\, (x, y) \in E \times F \mid \mathrm{pr}_1\, x = \lambda = 0 \,\}$ nicht leer ist. Es sei $A := A_2 \cap A_3$, mit A_2 aus (29). Ferner darf $T^{t\alpha}|_N$ nur von x abhängen.

(c) Gegeben sei ferner eine Schar von Anfangsdaten $\xi\colon I \to E$, $0 \in I \subset \mathbb{R}$, I offen, und ein y_0 aus F mit den Eigenschaften:

$$\xi \in C^k(I, E), \qquad x_0 := \xi(0) \in N \cap A_3, \qquad f(x_0, y_0) = 0.$$

$\Longrightarrow$ *Es gibt eine offene Umgebung $I' \subset I$ von $0 \in I$ mit der Eigenschaft, daß für jede offene zusammenhängende Teilumgebung $I'' \subset I'$ von 0 genau eine Funktion $g\colon I'' \to F$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:*

$$g \in C^0(I'', F), \qquad g(x_0) = y_0, \qquad \forall\, l \in I''\colon \big(\xi(l), g(l)\big) \in A \text{ und } f\big(\xi(l), g(l)\big) = 0.$$

Dieses g gehört zu $C^k(I'', F)$.

(Vergleiche Y. Choquet-Bruhat [21] für einen Satz über Lösbarkeit der Zwangsbedingungen innerhalb der AR, in dem dieselben Funktionenräume verwendet werden.) Bevor ich diesen Satz beweise, präsentiere ich zum besseren Verständnis erst einmal die folgende

Anwendung: *Gegeben sei eine Newtonsche Lösung, die dann natürlich auch für $t = 0$ die Newtonschen Zwangsbedingungen $f(x_0, y_0) = 0$ erfüllt. Dann wähle man sich eine beliebige Schar ξ von Anfangsdaten, z.B. in Abhängigkeit von $l = \lambda$, die bei $\lambda = 0$ durch x_0 führt und sooft differenzierbar ist, wie das benötigt wird.*

Der Satz besagt dann, daß es in einer Umgebung von $\lambda = 0$ eine eindeutig charakterisierte Schar $g(\lambda)$ von Lösungen der Zwangsbedingungen gibt, und daß diese Schar genausooft nach λ differenzierbar ist wie die Schar der Anfangsdaten.

Doch nun zum *Beweis:* zunächst definiere ich:

$$\begin{aligned} & \tilde{x} := l, \qquad \widetilde{E} := I, \qquad \tilde{f}\colon \widetilde{E} \times F \to G, \\ & \tilde{f}(\tilde{x}, y) := f\big(\xi(\tilde{x}), y\big), \qquad \tilde{A} := \{\, (\tilde{x}, y) \in \widetilde{E} \times F \mid \big(\xi(\tilde{x}), y\big) \in A \,\}. \end{aligned}$$

$\tilde{A}$ ist offen, da A offen und $(\tilde{x}, y) \mapsto \big(\xi(\tilde{x}), y\big)$ stetig ist. $\tilde{f}$ gehört zu $C^k(\tilde{A}, G)$, weil f nach Lemma 2 und ξ nach Voraussetzung C^k sind. Die Lösung $\big(\xi(0), y_0\big)$ liegt in A, so daß $(0, y_0) \in \tilde{A}$ gilt.

Damit ist für die Anwendung des Satzes über implizite Funktionen nur noch nachzuweisen, daß $D_2\tilde{f}(0, y_0)\colon F \to G$ ein Homöomorphismus ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} & D_2\tilde{f}(0, y_0) = D_2 f\big(\xi(0), y_0\big) = D\big\{f(\xi(0), \bullet)\big\}(y_0) \\ \Longrightarrow\quad & D_2\tilde{f}^\alpha\big(0, y_0\big)(u) = \Delta u^\alpha, \qquad u \in F, \end{aligned}$$

denn wir haben $f^\alpha\big(\xi(0), y\big) = \Delta y^\alpha - 4\pi G\, T^{t\alpha}|_N\,(x)$, da $\xi(0)$ auf der $(\lambda = 0)$-Ebene liegt. $\Delta\colon H_{s,\delta} \to H_{s-2,\delta+2}$ ist ein linearer Homöomorphismus, und diese Eigenschaft überträgt sich auf den „vierfachen" Laplace-Operator $\Delta\colon F \to G$. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen gegeben, und wenn wir seine Aussage abschreiben, gelangen wir zur zu beweisenden Behauptung. ■

Zu-Satz (Ideale Flüssigkeit)
Man wähle als Materiemodell eine ideale Flüssigkeit,

$$T^{\alpha\beta} = (\varrho + \lambda p)U^\alpha U^\beta + p h^{\alpha\beta}, \quad g(U, U) = 1, \quad U^a = U^t v^a, \quad p = z(\lambda, \varrho),$$

und als Materievariable $m = (\varrho, v^a) \in V := H_{s-2,\delta+2} \times (K_{s,\delta})^3$. Die Zustandsgleichung z sei aus $C^k(A_4, H_{s-2,\delta+2})$ mit einem offenen $A_4 \subset \mathbb{R} \times H_{s-2,\delta+2}$, das die Menge aller $(0, \varrho)$ enthält, d.h. im Newtonschen Fall für alle ϱ definiert ist.

$\Longrightarrow$ *Die Voraussetzung (b) in Satz 1 ist erfüllt mit*

$$A_3 := \{\, (x, y) \in A_2 \mid (\lambda, \varrho) \in A_4 \text{ und } g(v, v) \in W \,\} \tag{30}$$

(dabei sei $v^t := 1$) und $T^{t\alpha}|_N = \varrho v^\alpha$, A_3 enthält N, und in der Voraussetzung (c) gibt es genau ein $y_0 \in F$ zu gegebenem x_0.

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, daß A_3 offen ist. Bei $\lambda > 0$ haben wir auf A_2:

$$g_{\mu\nu} = -\lambda \left(h^{\alpha\beta}\right)^{-1}_{\mu\nu} = -\lambda\sqrt{g}\,\mathfrak{g}_{\mu\nu} = -\sqrt{-d(x, y)}\,\varepsilon\mathfrak{g}_{\mu\nu} \tag{31}$$

In der letzten Form gilt das auch bei $\lambda \leq 0$ und somit auf ganz A_2. Die Abbildung $(x, y) \mapsto \mathfrak{g}_{\mu\nu}$ ist nach Lemma 1 aus $C^\infty(A_1, K_{s,\delta})$ und $(x, y) \mapsto \sqrt{-d(x, y)}$ gehört zu $C^\infty(A_2, K_{s,\delta})$. Also ist $(x, y) \mapsto g_{\mu\nu}$ gleichfalls aus $C^\infty(A_2, K_{s,\delta})$. Damit ist insbesondere $(x, y) \mapsto g(v, v)$ stetig, so daß A_4 der Durchschnitt der Urbilder zweier offener Mengen (A_4 und W) unter stetigen Abbildungen und folglich offen ist. (Zunächst ist es das in A_2, aber letzteres ist offen in $E \times F$.) N gehört zu A_3, weil $N \subset A_2$ ist, alle $(0, \varrho)$ zu A_4 gehören, und weil $g(v, v)|_N = 1 \in W$ gilt.

Die Normierungsbedingung $g(U, U) = 1$ besagt:

$$1 = (U^t)^2 g(v, v) \iff (U^t)^2 = \frac{1}{g(v, v)} \tag{32}$$

Auf A_3 gehört $g(v,v)$ zu $\mathrm{Inv}(K_{s,\delta})$ und ist C^∞, so daß $(x,y) \mapsto (U^t)^2$ und damit auch $(x,y) \mapsto U^\alpha U^\beta$ in $C^\infty(A_3, K_{s,\delta})$ liegen. $(x,y) \mapsto \varrho + \lambda p$ ist natürlich in $C^\infty(A_3, H_{s-2,\delta+2})$, $\cdot : H_{s-2,\delta+2} \times K_{s,\delta} \to H_{s-2,\delta+2}$ ist bilinear und stetig, und folglich gehört $(x,y) \mapsto (\varrho + \lambda p)U^\alpha U^\beta$ zu $C^k(A_3, H_{s-2,\delta+2})$. Daß schließlich $(x,y) \mapsto ph^{\alpha\beta}$ gleichfalls in diese Kategorie fällt, sei ungläubigen Lesern zur Übung überlassen. Insgesamt ergibt sich so, daß $(x,y) \mapsto T^{\alpha\beta}$ aus $C^k(A_3, H_{s-2,\delta+2})$ ist.

Zur Eindeutigkeit von y_0 betrachte man $T^{\alpha\beta}$ auf N. Dort gilt $T^{t\alpha} = \varrho v^\alpha$, so daß die Zwangsbedingungen

$$\Delta \mathfrak{U}^{t\alpha} = 4\pi G\, T^{t\alpha}|_N$$

zu vorgegebenem $m = (\varrho, v^a)$ wegen der Invertierbarkeit von Δ genau eine Lösung haben. ■

Vom Standpunkt der 1-Schar Interpretation betrachtet ist der Satz 1 nicht ganz zufriedenstellend: die Existenz der Lösung wird nur in einer Umgebung von $\lambda = 0$ garantiert, während man sie gerne bis $\lambda = c^{-2}$ haben möchte. Einen kleinen Trost aber gibt es: die Lösung existiert dann ja für alle $|\lambda| \leq \lambda_0$ mit einem gewissen $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$. (Nebenbei bemerkt: der Satz ergibt Existenz und Eindeutigkeit auch für negative λ.) Dann wähle man einfach Einheiten, in denen $c^{-2} \leq \lambda_0$ gilt, und interpretiere die mathematischen Modelle in diesem neuen System! Damit behandelt man natürlich nicht mehr dasselbe Newtonsche physikalische Modell wie zu Anfang, denn auch *NL* ist nun in den neuen Einheiten zu interpretieren. Transformiert man aber zurück auf das alte System, so gelangt man zu einer — in mathematischem Sinne — ähnlichen Lösung. Anders ausgedrückt: eine Schar $\xi(\lambda)$ von Anfangsdaten mag vielleicht nicht bis $\lambda = c^{-2}$ eine Lösung besitzen, es gibt aber immer eine dazu ähnliche Schar, für die das gilt.

Nun ist man an der λ-Differenzierbarkeit ja nicht um ihrer selbst willen interessiert, sondern nur, um mit Reihen in das Gleichungssystem eingehen zu können und es iterativ zu lösen. Dazu ist es aber notwendig, daß die Ableitungen nach den Koordinaten mit der λ-Entwicklung vertauschen. Für die Partialsummen einer Taylor-Reihe ist das trivial, *aber was ist mit dem Restglied?* Betrachte man dazu die Taylor-Entwicklung eines $f \in C^k(\mathbb{R}, H_{s,\delta})$:

$$f = \sum_{i=0}^{k-1} f_i \lambda^i + R_k(\lambda), \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}^+ \colon \forall\, |\lambda| \leq \lambda_0 \colon \|R_k(\lambda)\|_{s,\delta} < \varepsilon\, |\lambda|^k\,.$$

Was garantiert uns nun, daß die Ableitungen des Restglieds $R_k(\lambda)$ nach den Koordinaten wieder von der Ordnung λ^k sind? Die Antwort darauf ist erfreulich einfach: die Definition der Sobolev-Räume. Deren Norm enthält ja auch die Ableitungen einer Funktion, und das führt hier zu:

$$\|R_{k,a}(\lambda)\|_{s-1,\delta+1} \leq \|R_k(\lambda)\|_{s,\delta} < \varepsilon\, |\lambda|^k\,.$$

Zwar kann man diesen Prozeß nur s-mal durchführen, doch öfter benötigen wir es auch nicht: in unserem Fall gilt $s \geq 2$, und mehr als zweimal brauchen wir eine Funktion nicht zu differenzieren, um sie in die Gleichungen einzusetzen. Also können wir schließen, daß die Zwangsbedingungen unter den Voraussetzungen von Satz 1 die rekursive Ermittlung von Taylor-Koeffizienten gestatten.

4.4. Eine Bemerkung zu den Zeitentwicklungsgleichungen

Die Zeitentwicklungsgleichungen bestehen aus den reduzierten Gleichungen $E^{\alpha\beta} = 0$ und aus $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ (Gleichung (9) mit vereinfachtem $H^{\alpha\beta}$ und (11)). Die Lösung des Systems kann man sich anschaulich so vorstellen, daß man $E^{\alpha\beta} = 0$ und $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ nach $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}{}_{,tt}$ bzw. $T^{t\alpha}{}_{,t}$ auflöst, und dann durch Differenzieren nach t sukzessive sämtliche Zeitableitungen von $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$ und $T^{t\alpha}$ erzeugt, wie man es auch z.B. beim Beweis des Cauchy-Kowalewskischen Satzes tut. Wenn die gesamte Lösung in t analytisch ist, dann kann man sie auf diese Weise explizit als Reihe erhalten.

Nun gibt es da aber ein kleines Problemchen: das Auflösen nach $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}{}_{,tt}$ ist leider mit Division durch λ verbunden, denn es gilt:

$$E^{\alpha\beta} = (-\lambda + 4\lambda^2 U)\mathfrak{U}^{\alpha\beta}{}_{,tt} + 8\lambda^2 \mathfrak{U}^{\alpha\beta}{}_{,tc} W^c + \Delta\mathfrak{U}^{\alpha\beta} + 4\lambda^2 Z^{cd}\mathfrak{U}^{\alpha\beta}{}_{,cd} + Y^{\alpha\beta} - 4\pi G\,\lambda g\, T^{\alpha\beta}. \tag{33}$$

Für die Gleichungen $E^{t\alpha} = 0$ ist das zumindest auf der Anfangshyperfläche unproblematisch, denn dort sind sie aufgrund der Zwangsbedingungen und der Bedingung für harmonische Koordinaten sowieso erfüllt. Anders ist das aber mit $E^{ab} = 0$: dort führt diese λ-Abhängigkeit dazu, daß im Grenzwert $\lambda \to 0$ die Zeitableitungen von Z^{ab} entfallen:

$$E^{ab}|_{\lambda=0} = \Delta Z^{ab} - U_{,a}U_{,b} + \tfrac{1}{2}\,|\mathrm{grad}\, U|^2\, \delta^{ab} - 4\pi G\, T^{ab}|_{\lambda=0}.$$

Das ergibt nun eine elliptische Gleichung für $Z^{ab}|_{\lambda=0}$ auf der Anfangshyperfläche, d. h. eine zusätzliche Zwangsbedingung. Daraus folgt insbesondere, daß man bei der relativistischen Verallgemeinerung einer Newtonschen Lösung das Anfangsdatum $Z^{ab}|_{\lambda=0}$ *nicht* frei vorgeben kann, es ist vielmehr aus U und $T^{ab}|_{\lambda=0}$ zu bestimmen.

Das ist aber noch nicht alles. Beschränken wir uns einmal auf Lösungsscharen mit folgenden Eigenschaften:

— sie sind C^∞ in λ,
— der Laplace-Operator ist invertierbar auf den gewählten Funktionenräumen,
— Entwicklungen nach λ und Koordinatenableitungen vertauschen,
— man kann die Bewegungsgleichungen (11) auflösen nach den Zeitableitungen der Materievariablen m.

Dann können wir mit einem Reihenansatz in die Gleichungen eingehen und erhalten Rekursionsformeln. Für deren Betrachtung führe ich die folgende Schreibweise ein:

$$\underset{n}{a} = [\underset{n-1}{a}, \underset{m}{b}, \ldots]$$

soll bedeuten, daß $\underset{n}{a}$, der n-te Entwicklungskoeffizient nach λ einer Größe a, gegeben ist als ein Funktional der Entwicklungskoeffizienten von a bis höchstens zur Ordnung $n-1$, der Koeffizienten einer Größe b bis maximal zur Ordnung m, usw. Dabei soll die echt funktionale Abhängigkeit beschränkt sein auf die Raumkoordinaten, die Abhängigkeit von t sei dagegen noch direkt rückführbar auf die Zeitabhängigkeit der Argumente des Funktionals. Damit sind auch Ableitungen nach den Raumkoordinaten im Funktional erlaubt.

Betrachte man nun die Gleichungen auf der Hyperfläche Σ_0. Dort folgt aus $E^{\alpha\beta} = 0$ mit der Invertierbarkeit von Δ:

$$\underset{n}{\mathfrak{U}}^{t\alpha} = [\underset{n}{m}, \underset{n-1}{\mathfrak{U}}^{\sigma\tau}, \underset{n-1}{\dot{Z}}^{cd}], \qquad \underset{n}{Z}^{ab} = [\underset{n}{m}, \underset{n}{U}, \underset{n-1}{\mathfrak{U}}^{c\sigma}, \underset{n-1}{\dot{Z}}^{cd}, \underset{n-1}{\ddot{Z}}^{cd}]. \tag{34}$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben:

$$\underset{n}{\dot{m}} = [\underset{n}{m}, \underset{n}{U}, \underset{n-1}{\mathfrak{U}}^{c\sigma}, \underset{n-1}{\dot{Z}}^{cd}]. \tag{35}$$

Betrachten wir zunächst den Fall $n = 0$:

$$\begin{aligned} \underset{0}{\mathfrak{U}}^{t\alpha} &= [\underset{0}{m}], \qquad \underset{0}{Z}^{ab} = [\underset{0}{m}, \underset{0}{U},], \qquad \underset{0}{\dot{m}} = [\underset{0}{m}, \underset{0}{U}] \\ \Longrightarrow \underset{0}{\mathfrak{U}}^{\mu\nu} &= [\underset{0}{m}], \qquad \underset{0}{\dot{m}} = [\underset{0}{m}]. \end{aligned}$$

Aber damit sind alle Zeitableitungen von $\underset{0}{\mathfrak{U}}^{\mu\nu}$ bestimmbar! Man differenziert einfach das erste Funktional nach t (daß das möglich ist, ist eine weitere Annahme, im wesentlichen über Δ), und ersetzt dann die Ableitungen von $\underset{0}{m}$ durch den zweiten Ausdruck. Insbesondere ist so $\dot{Z}^{ab}|_{\lambda=0}$ bestimmbar, und kann daher im Anfangswertproblem auch nicht mehr frei vorgegeben werden.

Aber es kommt noch schlimmer: ich behaupte, daß *alle* Entwicklungskoeffizienten von $\mathfrak{U}^{\mu\nu}$ bereits durch die Materiegrößen fixiert sind:

$$\underset{n}{\mathfrak{U}}^{\alpha\beta} = [\underset{n}{m}], \qquad \underset{n}{\dot{\mathfrak{U}}}^{\alpha\beta} = [\underset{n}{m}], \quad \text{usw.}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{36}$$

Beweis: Den Fall $n = 0$ habe ich gerade gezeigt, die anderen erhält man durch Induktion. Sei also (36) für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Aus (34) und der Voraussetzung folgt:

$$\begin{aligned} \underset{n+1}{\mathfrak{U}}^{t\alpha} &= [\underset{n+1}{m}, \underset{n}{\mathfrak{U}}^{\sigma\tau}, \underset{n}{\dot{Z}}^{cd}] = [\underset{n+1}{m}], \\ \underset{n+1}{Z}^{ab} &= [\underset{n+1}{m}, \underset{n+1}{U}, \underset{n}{\mathfrak{U}}^{c\sigma}, \underset{n}{\dot{Z}}^{cd}, \underset{n}{\ddot{Z}}^{cd}] = [\underset{n+1}{m}]. \end{aligned}$$

Für die zweite Beziehung wurde auch noch die erste mit verwendet. Die Bewegungsgleichungen liefern:

$$\underset{n+1}{\dot{m}} = [\underset{n+1}{m}, \underset{n+1}{U}, \underset{n}{\mathfrak{U}}^{c\sigma}, \underset{n}{\dot{Z}}^{cd}] = [\underset{n+1}{m}],$$

und damit hat man das nötige Rüstzeug, um sämtliche Zeitableitungen der $\underset{n}{\mathfrak{U}}^{\alpha\beta}$ funktional darzustellen. ■

Unter den oben gemachten Annahmen kann man also die metrischen Variablen vollständig durch die Materiegrößen festlegen. Dies eröffnet für das weitere Vorgehen zwei Möglichkeiten:

(a) Wenn man darauf besteht, im Anfangswertproblem die Funktionen Z^{ab} und $\dot{Z}^{ab}$ vorzugeben, dann ist damit zu rechnen, daß die sich unter der Zeitentwicklung einstellende Lösung die hier gemachten Annahmen verletzt. Vermutlich wird man auf die Entwickelbarkeit in Potenzen von λ oder auf das Vertauschen von λ-Grenzwert und Koordinaten-Ableitungen verzichten müssen. (So etwas deutet sich ja in einigen formalen Verfahren an.) Die wesentliche dann zu beantwortende Frage ist, welche Art der λ-Abhängigkeit auftreten kann, und wann man immer noch als Newtonschen Grenzwert der Schar die vorgegebene Newtonsche Lösung bekommt.

(b) Will man aber unbedingt auf Lösungsscharen hinaus, die nach Potenzen von λ entwickelbar sind (und das ist in meinen Augen erheblich interessanter), dann muß man sich auf eine geeignete Teilmenge der in dieser Arbeit benutzten freien Daten D beschränken. Die eben angestellten Betrachtungen zeigen, daß diese speziellen Daten keine einfach charakterisierte Teilmenge von D sein werden, da die gesuchten Z^{ab} mit der Lösung der hier betrachteten Zwangsbedingungen verknüpft sind. Folglich wird man nach einem neuen Anfangswertproblem suchen müssen, bei dem man vermutlich nur noch die Materievariablen frei vorgeben kann, und wo dann aus einem neuen System von Zwangsbedingungen alle $\mathfrak{U}^{\mu\nu}$ auf der Anfangshyperfläche zu bestimmen sind. Diese neuen Zwangsbedingungen werden die Bewegungsgleichungen mit in Betracht ziehen müssen. Für die Zeitentwicklung wird dann zu zeigen sein, daß die Differenzierbarkeit nach λ von den Entwicklungsgleichungen erhalten wird.

Natürlich ist aber auch eine Mischung beider Methoden möglich. Damit meine ich eine Vorgehensweise, bei der man eine Schar von Anfangsdaten nach (a) vorgibt, sie aber in den ersten Entwicklungsordnungen mit den speziellen Daten nach (b) in Übereinstimmung bringt. Möglicherweise werden die Zeitentwicklungsgleichungen diesen Charakter der Daten erhalten, allerdings vermute ich, daß dann bei den höheren λ-Ableitungen der Grenzwert $\lambda \to 0$ nicht mehr mit den zweiten Zeitableitungen vertauscht.

5. Zusammenfassung

An dieser Stelle ist es vielleicht empfehlenswert, noch einmal die Einleitung durchzulesen, um sich den Ausgangspunkt ins Gedächtnis zu rufen. Ich hatte dort zwei Themenkreise identifiziert: „Newtonscher Grenzwert“ und „relativistische Erweiterung“.

Die Behandlung des Newtonschen Grenzwertes setzte zunächst eine detaillierte Betrachtung der Konsequenzen der Axiome der Ehlersschen Rahmentheorie voraus. Der wichtigste Schlüssel dazu war die $(1+3)$-Zerlegung nach einem gegebenen zeitartigen Vektorfeld. Speziell die Zerlegung des Zusammenhanges konnte ich dabei auf ein allgemeines Problem zurückführen, nämlich die Eigenschaften einer „projizierten Ableitung“. Dieser Teil ist auch unabhängig von der hier betrachteten Rahmentheorie von Interesse. In der Allgemeinen Relativitätstheorie sind $(1+3)$-Zerlegungen für das Anfangswertproblem zwar seit langem gebräuchlich, ihr Ausgangspunkt ist aber immer eine Foliation der Raumzeit durch raumartige Hyperflächen. Für den Newtonschen Fall erhält man daraus jedoch keine zusätzliche Information, da eine Newtonsche Raumzeit zumindest lokal nur eine solche Foliation zuläßt. Dies führt dazu, daß eine raumartige Foliation bei $\lambda = 0$ nicht mehr imstande ist, ein Normalenvektorfeld festzulegen, weil jeder nicht tangentiale Vektor bereits orthogonal zur Hyperfläche ist. Dagegen ist die Zerlegung der Raumzeit mit einem zeitartigen Vektorfeld unabhängig vom Wert von λ durchführbar. Darüber hinaus scheint sie mir auch logisch befriedigender zu sein, denn aus dem Mathematischen rückübersetzt entspricht dieses Vorgehen einer Situation, in der man Informationen über eine Raumzeit dadurch sammelt, daß man Beobachter hindurchschickt. Und was könnte natürlicher sein?

Für den Newtonschen Grenzwert will man aus einer relativistischen Lösung eine Lösung der Newtonschen Gravitationstheorie erhalten. Diese Situation habe ich zunächst präzisiert zum Fall einer Schar $L(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, von Lösungen der Rahmentheorie auf einer einzigen Mannigfaltigkeit. Auf der mathematischen Seite war dann offensichtlich, was man unter der Existenz des Newtonschen Grenzwertes zu verstehen hatte, und ich konnte notwendige und hinreichende Bedingungen für die Grenzwerte von Metriken und Zusammenhang finden. Für die Krümmung scheint das nicht so einfach möglich zu sein, doch gelangten wir immerhin zum zentralen Satz 3.1, der hinreichende Bedingungen für die Existenz des Newtonschen Grenzwertes anbietet. Daß man mit diesen Bedingungen etwas anfangen kann, habe ich sodann an je einem allgemeinen und einem speziellen Beispiel gezeigt.

Auf der Seite der physikalischen Bedeutung stellte sich heraus, daß die Interpretation der mathematischen Modelle einer Lösungsschar mit Grenzwert ungeahnte Möglichkeiten bietet. Dabei war die „2-Scharen Interpretation“ nicht nur sparsam im Theorien-Verbrauch, sie lieferte uns auch zwei wesentliche zusätzliche Kenntnisse:

— erstens konnte geklärt werden, warum die im Prinzip mißbräuchliche Benutzung spezieller post-Minkowskischer Näherungen post-Newtonsche Ergebnisse liefern kann. Dies ließ sich zusammenfassen in der Aussage, daß man bei vorgegebener Genauigkeit für gewisse hinreichend schwache Gravitationsfelder zwischen der Newtonschen und der Einsteinschen Theorie frei wählen kann.

— Und zweitens bekamen wir ein einfaches Kochrezept zur Herstellung Newtonscher Grenzwerte für relativistische Lösungen, sofern letztere zu einer relativistischen Lösungsschar gehören, die den Minkowski-Raum beinhaltet. Daß dann der einzige Grenzwert unter Umständen der des Minkowski-Raumes ist, ließ sich allerdings nicht ausschließen. Damit ist aber wenigstens prinzipiell der Anschluß hergestellt an die anfangs durchgeführte Präzisierung des Newtonschen Grenzwertes.

Nebenbei konnte man auch noch lernen, wie man „$c \to \infty$" zu interpretieren hat, damit es sinnvoll wird, aber das ist nicht so wesentlich.

Für die relativistische Erweiterung einer Newtonschen Lösung war dann durch die Behandlung des Newtonschen Grenzwertes bereits klar, daß dies eine Frage nach einer Schar von Lösungen der Rahmentheorie war. Die wichtigste allgemeine Eigenschaft der Schar war die der näherungsweisen Bestimmbarkeit, und ich habe mich dafür kapriziert auf eine Entwicklung nach Potenzen von λ.

An dieser Stelle möchte ich eine Zwischenbemerkung machen zum Zählen der Ordnungen bei post-Newtonschen Näherungen: manche Autoren reden von der soundsovielten post-Newtonschen Ordnung, als ob damit schon klar wäre, was gemeint ist. Zu welcher λ-Ordnung eine Größe gehört, hängt jedoch ab von den verwendeten Variablen und Gleichungen. Und die unterscheiden sich bei verschiedenen Methoden und Autoren durchaus. Als Beispiel will ich nur mich selber anführen: die Komponenten W^a der metrischen Tensordichte z. B. sind vom Standpunkt der für das Anfangswertproblem zugrundegelegten Gleichungen zu bezeichnen als Größen der Ordnung λ^0, für die Variablen und Gleichungen der Axiome dagegen handelt es sich um ein Objekt der Ordnung λ^1, wie man anhand der Entwicklungen im Anhang feststellen kann. Dies führt insbesondere dann zur Konfusion, wenn eine Raumzeit bis zu einer gewissen λ-Ordnung näherungsweise zu bestimmen ist. Glücklicherweise haben wir mit der Rahmentheorie ein Werkzeug zur Hand, das uns physikalisch interpretierbare und λ-unabhängig definierte Größen offeriert. Damit kann ich eine post-Newtonsche Entwicklung bis zur Ordnung n dadurch charakterisieren, daß die Objekte $g_{\mu\nu}$, $h^{\alpha\beta}$, $\Gamma^{\eta}_{\sigma\tau}$ und $T^{\alpha\beta}$ bis zur Ordnung n einschließlich bekannt und die Axiome bis zur selben Ordnung erfüllt sind. Man beachte, daß dies dazu führt, daß man die $\Gamma^{\eta}_{\sigma\tau}$ nur bis zur Ordnung $n-1$ aus den angegebenen Metriken ermitteln kann. Will man den Zusammenhang nicht als selbständige Größe auffassen (was er ja im Newtonschen Fall ist), dann muß man die Metriken eine Ordnung weiter bestimmen.

Nachdem also klar war, was unter einer post-Newtonschen Entwicklung zu verstehen ist, reduzierte sich die Frage nach Existenz dieser Näherung von selbst auf die Frage nach den Raumzeiten, für die diese Entwicklung existiert. Auch das ist ein Punkt, der fast immer ignoriert wird. Manche Proponenten post-Newtonscher Verfahren kleiden ihre Aussagen in die allgemeine Form, daß man für post-Newtonsche Entwicklungen dieses oder jenes Funktionensystem benötigt. Das ist in dieser Kürze einfach falsch, wie das Beispiel mit der Schwarzschild-Metrik in der Einleitung gezeigt hat. Günstigstenfalls haben diese Autoren nur übersehen, daß sie mit ihrem speziellen Verfahren eine besondere Klasse von Raumzeiten ausgewählt haben, zu denen dann mein Schwarzschild-Gegenbeispiel offensichtlich nicht gehören kann. (Ein anderes hübsches Beispiel erhält man dadurch, daß man im Minkowski-Raum eine Koordinatentransformation durchführt, die nicht-entwickelbare Funktionen enthält.) Entweder gibt man also die Raumzeiten vor oder die Art der Entwicklung, und ich habe mich hier für den zweiten Weg entschieden. Zur Charakterisierung der Menge der entwickelbaren Raumzeiten bot sich dann das raumartige Anfangswertproblem an. Bei geeigneter Wahl der Variablen und Gleichungen erhielten wir für die Zwangsbedingungen mit erstaunlicher Leichtigkeit eine optimale Aussage: der Satz 4.1 stellt fest, daß eindeutig charakterisierte Lösungen der Zwangsbedingungen existieren, und daß sie die λ-Differenzierbarkeit der freien Daten erben; mehr kann man billigerweise nicht erwarten. Damit ist wenigstens klar, daß man jede Newtonsche Lösung bei festem t zu relativistischen Anfangsdaten erweitern kann.

Aber natürlich kam das dicke Ende hinterher: es ergaben sich deutliche Hinweise darauf, daß nicht alle Daten ihre λ-Differenzierbarkeit unter der Zeitentwicklung behalten. Für weitere Untersuchungen hat man damit prinzipiell zwei Möglichkeiten:

— entweder befaßt man sich mit der Zeitentwicklung für die Klasse aller λ-differenzierbaren Anfangsdaten: das führt mit einiger Sicherheit zu singulären Reihen,
— oder man versucht von vornherein, ein neues Anfangswertproblem zu formulieren, dessen Zwangsbedingungen als Lösung Anfangsdaten beschreiben, deren λ-Differenzierbarkeit unter der Zeitentwicklung erhalten bleibt.

Auf beiden Wegen wird man aber generell einige Schwierigkeiten haben, die sich ergebenden Differentialgleichungssysteme in den Griff zu bekommen.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß von den eingangs erwähnten zwei Problemkreisen der Komplex des Newtonschen Grenzwertes zufriedenstellend geklärt werden konnte. Für die relativistische Erweiterung Newtonscher Lösungen ist dies nicht gelungen, aber ich konnte immerhin zeigen, daß man einige präzise Aussagen erhalten kann. Es ist zu hoffen, daß sich damit ein Ende der auf diesem Gebiet herrschenden Phase der mathematischen Gesetzlosigkeit abzuzeichnen beginnt.

Anhang: Entwicklungen nach λ bis auf $O(\lambda^3)$

Dieser Anhang enthält Entwicklungen der von der Metrik abgeleiteten Größen für den Fall, daß die Metrik $\hat{g}_{\mu\nu}$ (Signatur $(-{+}{+}{+})$) auf folgende Art von Variablen $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$ abhängt:

$$\hat{g}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\mathfrak{g}^{\alpha\beta}, \qquad g = |\det(\mathfrak{g}^{\sigma\tau})|, \qquad \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \underset{0}{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta} + 4\varepsilon^3\mathfrak{U}^{\alpha\beta},$$

$$(\underset{0}{\mathfrak{g}}^{\alpha\beta}) = \operatorname{diag}(-\varepsilon, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}), \qquad \lambda = \varepsilon^2 > 0, \qquad (\mathfrak{U}^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} U & \vec{W}^T \\ \vec{W} & Z \end{pmatrix}.$$

Es wird nicht vorausgesetzt, daß die Koordinaten harmonisch sind. Für die hier angegebenen Entwicklungen nehme ich an, daß gilt:

$$\mathfrak{U}^{\alpha\beta} = O(\lambda^0), \qquad \mathfrak{U}^{\alpha\beta}{}_{,\mu} = O(\lambda^0), \qquad \mathfrak{U}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = O(\lambda^0).$$

Ich werde hier nur die Gleichungen entwickeln, nicht die $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$. Für die Anwendung der Formeln muß man also noch Reihen für die $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}$ einsetzen. Ferner sollen die Konventionen der Vektoranalysis im euklidischen $\mathbb{R}^3$ gelten, erweitert um den Operator Div, den ich als „Matrix-Divergenz“ $(\operatorname{Div} Z)^a = Z^{ab}{}_{,b}$ definiere. Die Summenkonvention soll sich generell auf doppelt vorkommende Indizes beziehen unabhängig davon, ob sie oben oder unten stehen. Mit derselben Frechheit wird auch über Paare von Indizes (anti-)symmetrisiert, bei denen der eine oben und der andere unten steht.

Die hier angegebenen Entwicklungen habe ich überprüft mit dem Computeralgebra-Programm REDUCE [22]. Für den Riemann-, den Ricci- und den Einstein-Tensor geschah das so: die am Schreibtisch bestimmten Ergebnisse wurden in diesen Anhang übernommen und ausgedruckt. Damit schrieb ich dann ein REDUCE-Programm, das die Differenz zu den unabhängig von REDUCE ermittelten Entwicklungen bildete. Nach Eliminieren von ein paar Fehlern war der Unterschied Null.

1. Entwicklung der Metriken

Falls λ hinreichend klein ist, so gilt $\det(\mathfrak{g}^{\alpha\beta}) < 0$, und es ergibt sich:

$$\lambda g = 1 - \lambda\,4U + \lambda^2\,4\operatorname{Sp} Z + O(\lambda^3)$$

Für die Zeitmetrik $g_{\mu\nu} = -\lambda\,\hat{g}_{\mu\nu}$ erhält man:

$$\begin{array}{lcccccccc} g_{tt} & = & 1 & + & \lambda\,2U & + & \lambda^2\,2(3U^2 + \operatorname{Sp} Z) & + & O(\lambda^3) \\ g_{tb} & = & & & & - & \lambda^2\,4W^b & + & O(\lambda^3) \\ g_{ab} & = & & - & \lambda\,\delta_{ab} & + & \lambda^2\,2U\delta_{ab} & + & O(\lambda^3) \end{array}$$

Die Entwicklung der Raummetrik $h^{\alpha\beta} = \hat{g}^{\alpha\beta}$ lautet:

$$
\begin{array}{lcccccccl}
h^{tt} & = & & - & \lambda & + & \lambda^2\, 2U & + & O(\lambda^3) \\
h^{at} & = & & & & & \lambda^2\, 4W^a & + & O(\lambda^3) \\
h^{ab} & = & \delta^{ab} & + & \lambda\, 2U\delta^{ab} & + & \lambda^2\, 2\left((3U^2 - \operatorname{Sp} Z)\delta^{ab} + 2Z^{ab}\right) & + & O(\lambda^3)
\end{array}
$$

2. Entwicklung des Zusammenhangs

Für den Levi-Civita Zusammenhang $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} h^{\alpha\delta}(g_{\beta\gamma,\delta} - g_{\delta\beta,\gamma} - g_{\gamma\delta,\beta})/\lambda$ zu $\hat{g}_{\mu\nu}$ findet man:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t_{tt} &= \lambda\, U_{,t} + \lambda^2 \left((\operatorname{Sp} Z + 2U^2)_{,t} + 4(\overrightarrow{W}, \operatorname{grad} U)\right) + O(\lambda^3) \\
\Gamma^t_{bt} &= \lambda\, U_{,b} + \lambda^2\, (\operatorname{Sp} Z + 2U^2)_{,b} + O(\lambda^3) \\
\Gamma^t_{bc} &= -\lambda^2 \left(\delta_{bc} U_{,t} + 4W^{(b}{}_{,c)}\right) + O(\lambda^3) \\
\Gamma^a_{tt} &= U_{,a} + \lambda \left(4W^a{}_{,t} + (\operatorname{Sp} Z + 4U^2)_{,a}\right) \\
&\qquad + \lambda^2\, 4\left(U_{,t} W^a + 4UW^a{}_{,t} + (4U^3 - |\overrightarrow{W}|^2)_{,a} + U \operatorname{Sp} Z_{,a} + Z^{ad} U_{,d}\right) + O(\lambda^3) \\
\Gamma^a_{bt} &= \lambda \left(4W^{[a}{}_{,b]} - \delta^a_b U_{,t}\right) + \lambda^2 \left(Q^{ab}{}_{,t} + 16UW^{[a}{}_{,b]} - 4U_{,a} W^b\right) + O(\lambda^3) \\
\Gamma^a_{bc} &= \lambda\, (U_{,a}\delta_{bc} - \delta^a_b U_{,c} - \delta^a_c U_{,b}) + \lambda^2\, (Q^{ab}{}_{,c} + Q^{ac}{}_{,b} - Q^{bc}{}_{,a}) + O(\lambda^3)
\end{aligned}
$$

Dabei sei $Q^{ab} := (\operatorname{Sp} Z - 2U^2)\delta^{ab} - 2Z^{ab}$. Harmonische Koordinaten sind gekennzeichnet durch das Verschwinden der folgenden Ausdrücke:

$$
\Box\, x^{\alpha} = -h^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \lambda^2 \left(1 + O(\lambda)\right) 4\mathfrak{U}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}.
$$

3. Entwicklung des Krümmungstensors und abgeleiteter Größen

Der Riemann-Tensor $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = 2(\Gamma^{\alpha}_{\beta[\delta,\gamma]} + \Gamma^{\alpha}_{\mu[\gamma}\Gamma^{\mu}_{\delta]\beta})$ lautet entwickelt:

$$
\begin{aligned}
R^t{}_{tct} &= \lambda^2\, 4U_{,ce} W^e + O(\lambda^3) \\
R^t{}_{tcd} &= O(\lambda^3) \\
R^t{}_{bct} &= \lambda\, U_{,bc} \\
&\quad + \lambda^2 \left(U_{,tt}\delta_{bc} + 4W^{(b}{}_{,c)t} + 4UU_{,bc} + \operatorname{Sp} Z_{,bc} + 7U_{,b}U_{,c} - |\operatorname{grad} U|^2\, \delta_{bc}\right) \\
&\quad + O(\lambda^3) \\
R^t{}_{bcd} &= \lambda^2 \left(2\delta_{b[c} U_{,d]t} + 4W^{[c}{}_{,d]b}\right) + O(\lambda^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^a{}_{tct} &= U_{,ac} + \lambda\big(U_{,tt}\delta^a_c + 4W^{(a}{}_{,c)t} + 8UU_{,ac} + \operatorname{Sp} Z_{,ac} + 7U_{,a}U_{,c} - |\operatorname{grad} U|^2\,\delta^a_c\big)\\
&\quad + \lambda^2\Big(4UU_{,tt}\delta^a_c + 2Z^{ac}{}_{,tt} - \operatorname{Sp} Z_{,tt}\delta^a_c + 8U_{,t(a}W^{c)} + 16UW^{(a}{}_{,c)t}\\
&\qquad + 4\big((4U^3 - |\overrightarrow{W}|^2)_{,ac} + U\operatorname{Sp} Z_{,ac} + Z^{ae}U_{,ec}\big)\\
&\qquad + 2U_{,t}U_{,t}\delta^a_c + 4U_{,t}W^{(a}{}_{,c)} + 16U_{,(a}W^{c)}{}_{,t} - 4(\operatorname{grad} U, \overrightarrow{W}_{,t})\delta^a_c\\
&\qquad - 12U(U_{,a}U_{,c} + |\operatorname{grad} U|^2\,\delta^a_c) + 16W^{[a}{}_{,e]}W^{[c}{}_{,e]}\\
&\qquad + 4Z^{e(a}{}_{,c)}U_{,e} + 2U_{,(a}\operatorname{Sp} Z_{,c)} - 2U_{,e}Z^{ac}{}_{,e}\Big) + O(\lambda^3)\\
R^a{}_{tcd} &= \lambda\,(2\delta^a_{[c}U_{,d]t} + 4W^{[c}{}_{,d]a})\\
&\quad + \lambda^2\Big(2Q^{a[d}{}_{,c]t} - 8U_{,a[c}W^{d]} + 16UW^{[c}{}_{,d]a} + 2U_{,t}U_{,[c}\delta^a_{d]}\\
&\qquad + 16U_{,a}W^{[c}{}_{,d]} + 8U_{,[c}(W^a{}_{,d]} - W^{d]}{}_{,a}) - 4U_{,e}\delta^a_{[c}(W^e{}_{,d]} - W^{d]}{}_{,e})\Big) + O(\lambda^3)\\
R^a{}_{btd} &= \lambda\,2(U_{,t[a}\delta_{b]d} - 2W^{[a}{}_{,b]d})\\
&\quad + \lambda^2\Big(2Q^{d[a}{}_{,b]t} - 16UW^{[a}{}_{,b]d} + 4U_{,ad}W^b - 2U_{,[a}\delta_{b]d}U_{,t} - 16U_{,d}W^{[a}{}_{,b]}\\
&\qquad + 8U_{,[a}(W^{b]}{}_{,d} - W^d{}_{,b]}) - 4U_{,e}(\delta_{d[b}W^e{}_{,a]} + \delta^{[a}_d W^{b]}{}_{,e})\Big) + O(\lambda^3)\\
R^a{}_{bcd} &= \lambda\,2(U_{,a[c}\delta_{d]b} - U_{,b[c}\delta^a_{d]})\\
&\quad + \lambda^2\,2\Big(Q^{b[c}{}_{,d]a} - Q^{a[c}{}_{,d]b} + U_{,a}U_{,[c}\delta_{d]b} - U_{,b}U_{,[c}\delta^a_{d]} - \delta^a_{[c}\delta_{d]b}\,|\operatorname{grad} U|^2)\Big) + O(\lambda^3)
\end{aligned}
$$

Für den Ricci-Tensor $R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu}$ und den Krümmungsskalar $R = h^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ findet man:

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= \Delta U + \lambda\,(3U_{,tt} + 4\operatorname{div}\overrightarrow{W}_{,t} + \Delta\operatorname{Sp} Z + 8U\Delta U + 4\,|\operatorname{grad} U|^2)\\
&\quad + \lambda^2\Big(12UU_{,tt} - \operatorname{Sp} Z_{,tt} + 16U\operatorname{div}\overrightarrow{W}_{,t} + 8(\operatorname{grad} U_{,t}, \overrightarrow{W})\\
&\qquad + 48U^2\Delta U - 4\Delta|\overrightarrow{W}|^2 + 4U\Delta\operatorname{Sp} Z + 4Z^{cd}U_{,cd}\\
&\qquad + 6U_{,t}U_{,t} + 4U_{,t}\operatorname{div}\overrightarrow{W} + 4(\operatorname{grad} U, \overrightarrow{W}_{,t})\\
&\qquad + 48U\,|\operatorname{grad} U|^2 + 8|\operatorname{rot}\overrightarrow{W}|^2 + 4(\operatorname{Div} Z, \operatorname{grad} U)\Big) + O(\lambda^3)\\
R_{tb} &= \lambda\,2(U_{,tb} + \operatorname{div}\overrightarrow{W}_{,b} - \Delta W^b)\\
&\quad + \lambda^2\Big(8UU_{,tb} - 2Z^{be}{}_{,et} - 4\Delta U\,W^b + 8U(\operatorname{div}\overrightarrow{W}_{,b} - \Delta W^b)\\
&\qquad + 6U_{,t}U_{,b} + 16U_{,e}W^{[e}{}_{,b]}\Big) + O(\lambda^3)\\
R_{ab} &= \lambda\,\Delta U\delta_{ab} - \lambda^2\,\big(U_{,tt}\delta_{ab} + 4W^{(a}{}_{,b)t} + 4Z^{e(a}{}_{,b)e} + \Delta Q^{ab} + 2U_{,a}U_{,b}\big) + O(\lambda^3)\\
R &= \lambda\,2\Delta U\\
&\quad - \lambda^2\,2\big(3U_{,tt} + 4\operatorname{div}\overrightarrow{W}_{,t} - 6U\Delta U + 2Z^{cd}{}_{,cd} + \Delta\operatorname{Sp} Z - 3\,|\operatorname{grad} U|^2\,\big) + O(\lambda^3)
\end{aligned}
$$

Den Einstein-Tensor $G^{\alpha\beta} = h^{\alpha\mu}h^{\beta\nu}\big(R_{\mu\nu} + (1/2\lambda)R\,g_{\mu\nu}\big)$ will ich nicht direkt angeben, sondern als $g\,G^{\alpha\beta}/2\lambda$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{g}{2\lambda}\,G^{tt} &= \Delta U + \lambda\,(-Z^{cd}{}_{,cd} + \tfrac{7}{2}\,|\mathrm{grad}\,U|^2) \\
&\quad + \lambda^2\Big(4Z^{cd}U_{,cd} - 8W^c\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{W}_{,c} + 4UZ^{cd}{}_{,cd} + \tfrac{3}{2}(U_{,t})^2 + 4U_{,t}\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{W} \\
&\qquad + 14U\,|\mathrm{grad}\,U|^2 - 6W^c{}_{,d}W^d{}_{,c} - 2W^c{}_{,d}W^c{}_{,d} \\
&\qquad + \big(\mathrm{grad}\,U, 4\,\mathrm{Div}\,Z - \mathrm{grad}(\mathrm{Sp}\,Z)\big)\Big) + O(\lambda^3) \\
\frac{g}{2\lambda}\,G^{at} &= \Delta W^a - \mathfrak{U}^{t\sigma}{}_{,\sigma a} + \lambda\,\big(Z^{ac}{}_{,ct} - 3U_{,t}U_{,a} + 4(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{W}\times\mathrm{grad}\,U)^a\big) \\
&\quad + \lambda^2\Big(4W^cW^a{}_{,ct} - 4UZ^{ac}{}_{,ct} + 4Z^{cd}W^a{}_{,cd} - 4W^cZ^{ad}{}_{,cd} \\
&\qquad - 4Z^{ac}\mathfrak{U}^{t\sigma}{}_{,\sigma c} + 4W^a\mathfrak{U}^{c\sigma}{}_{,c\sigma} + 4W^a{}_{,c}\mathfrak{U}^{c\sigma}{}_{,\sigma} \\
&\qquad - 12UU_{,t}U_{,a} + 4\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{W}\,W^a{}_{,t} + U_{,t}\,\mathrm{Sp}\,Z_{,a} + U_{,a}\,\mathrm{Sp}\,Z_{,t} - 4Z^{ac}{}_{,t}U_{,c} \\
&\qquad - 4(\mathrm{grad}\,U,\overrightarrow{W})U_{,a} + 2\,|\mathrm{grad}\,U|^2\,W^a + 16U(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{W}\times\mathrm{grad}\,U)^a \\
&\qquad + 4Z^{cd}{}_{,a}W^d{}_{,c} - 8Z^{ac}{}_{,d}W^{(c}{}_{,d)}\Big) + O(\lambda^3) \\
\frac{g}{2\lambda}\,G^{ab} &= \Delta Z^{ab} - 2\mathfrak{U}^{\sigma(a}{}_{,b)\sigma} + \mathfrak{U}^{\sigma\tau}{}_{,\sigma\tau}\,\delta^{ab} - S^{ab}_{(0)} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,S_{(0)}\delta^{ab} \\
&\quad + \lambda\,\big(-Z^{ab}{}_{,tt} - S^{ab}_{(1)} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,S_{(1)}\delta^{ab}\big) \\
&\quad + \lambda^2\Big(4UZ^{ab}{}_{,tt} + 8W^cZ^{ab}{}_{,ct} + 4Z^{cd}Z^{ab}{}_{,cd} \\
&\qquad + 4\mathfrak{U}^{\sigma\tau}{}_{,\sigma\tau}Z^{ab} - 8W^{(a}\mathfrak{U}^{b)\sigma}{}_{,\sigma t} - 8Z^{c(a}\mathfrak{U}^{b)\sigma}{}_{,\sigma c} + 4Z^{ab}{}_{,\sigma}\mathfrak{U}^{\sigma\tau}{}_{,\tau} \\
&\qquad - S^{ab}_{(2)} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,S_{(2)}\,\delta^{ab} - 8W^a{}_{,t}W^b{}_{,t} - 8W^{(a}{}_{,c}Z^{b)c}{}_{,t} + 2\,|\mathrm{grad}\,U|^2\,Z^{ab} \\
&\qquad - 8U_{,(a}Z^{b)c}U_{,c} + 8Z^{cd}{}_{,(a}Z^{b)c}{}_{,d} - 4Z^{ac}{}_{,d}(Z^{bc}{}_{,d} + Z^{bd}{}_{,c})\Big) + O(\lambda^3)
\end{aligned}$$

Dabei sei:

$$\begin{aligned}
S^{ab}_{(0)} &:= U_{,a}U_{,b}, \\
S^{ab}_{(1)} &:= 3(U_{,t})^2\delta^{ab} + 8U_{,(a}W^{b)}{}_{,t} + 8UU_{,a}U_{,b} + 4(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{W})^a(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{W})^b + 2U_{,(a}\,\mathrm{Sp}\,Z_{,b)}, \\
S^{ab}_{(2)} &:= 12U(U_{,t})^2\delta^{ab} + 8U_{,t}U_{,(a}W^{b)} + 32UU_{,(a}W^{b)}{}_{,t} - 2U_{,t}\,\mathrm{Sp}\,Z_{,t}\delta^{ab} - 8W^c{}_{,(a}Z^{b)c}{}_{,t} \\
&\quad + 48U^2U_{,a}U_{,b} + 16U(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{W})^a(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{W})^b - 16U_{,(a}W^c{}_{,b)}W^c \\
&\quad + 8UU_{,(a}\,\mathrm{Sp}\,Z_{,b)} + 4Z^{cd}U_{,c}U_{,d}\delta^{ab} - \mathrm{Sp}\,Z_{,a}\,\mathrm{Sp}\,Z_{,b} + 2Z^{cd}{}_{,a}Z^{cd}{}_{,b} - 4Z^{cd}{}_{,e}Z^{de}{}_{,c}\delta^{ab}.
\end{aligned}$$

Sollte irgendjemand einmal gezwungen sein, mit den λ^2-Termen zu rechnen, so will ich ihn/sie an dieser Stelle meines tiefempfundenen Beileids versichern.

4. Entwicklung von (1+3)-Größen zu den Hyperflächen $t = const.$

Die Entwicklungen von Lapse-Funktion $\alpha = \sqrt{-\lambda/h^{tt}}$, Normalenvektor $N^\mu = -\alpha h^{\mu t}/\lambda$ und Shift-Vektor $S^\mu = \delta^\mu_t - \alpha N^\mu$ lauten:

$$\alpha = 1 + \lambda\, U + \lambda^2\,(\tfrac{5}{2}U^2 + \mathrm{Sp}\, Z) + O(\lambda^3)$$

$$N^t = 1 - \lambda\, U - \lambda^2\,(\tfrac{3}{2}U^2 + \mathrm{Sp}\, Z) + O(\lambda^3) \qquad S^t = 0$$

$$N^a = -\lambda\, 4W^a - \lambda^2\, 12UW^a + O(\lambda^3) \qquad S^a = \lambda\, 4W^a + \lambda^2\, 16UW^a + O(\lambda^3)$$

Die erste Fundamentalform der Hyperflächen $t = \text{const.}$ ist $\gamma_{\mu\nu} = (N^\bullet_\mu N^\bullet_\nu - g_{\mu\nu})/\lambda$. Ihre Entwicklung ergibt sich zu:

$$\begin{array}{lclcccll}
\gamma_{tt} & = & & & & \lambda^2\, 16|\overrightarrow{W}|^2 & + & O(\lambda^3) \\
\gamma_{tb} & = & & & \lambda\, 4W^b & + \;\lambda^2\, 8UW^b & + & O(\lambda^3) \\
\gamma_{ab} & = & \delta_{ab} & - & \lambda\, 2U\delta_{ab} & + \;\lambda^2\, 2\big((\mathrm{Sp}\, Z - U^2)\delta_{ab} - 2Z^{ab}\big) & + & O(\lambda^3)
\end{array}$$

Die zweite Fundamentalform $\chi_{\mu\nu} = -\pi^\sigma_\mu \pi^\tau_\nu N^\bullet_{\sigma;\tau}$ $(\pi^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - N^\mu N^\bullet_\nu)$ besitzt die Entwicklung:

$$\begin{array}{lclcl}
\chi_{t\nu} & = & & & O(\lambda^3) \\
\chi_{ab} & = & -\lambda^2\,\big(U_{,t}\delta_{ab} + 4W^{(a}{}_{,b)}\big) & + & O(\lambda^3)
\end{array}$$

5. Entwicklung des Materietensors einer idealen Flüssigkeit

Für einen Materietensor der Form

$$T^{\alpha\beta} = (\varrho + \lambda p)U^\alpha U^\beta + p h^{\alpha\beta}, \qquad g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 1, \qquad U^a = U^t v^a,$$
$$\varrho = O(\lambda^0), \qquad p = O(\lambda^0), \qquad v^a = O(\lambda^0)$$

erhält man die folgende Entwicklung $(v := |\vec{v}|)$:

$$\begin{aligned}
(U^t)^2 &= 1 + \lambda\, L + \lambda^2\, M + O(\lambda^3) \\
T^{tt} &= \varrho + \lambda\, \varrho L + \lambda^2\,(\varrho M + pv^2) + O(\lambda^3) \\
T^{tb} &= \varrho v^b + \lambda\,(\varrho L + p)v^b + \lambda^2\,\big((\varrho M + pL)v^b + 4pW^b\big) + O(\lambda^3) \\
T^{ab} &= \varrho v^a v^b + p\delta^{ab} + \lambda\,\big((\varrho L + p)v^a v^b + 2pU\delta^{ab}\big) \\
&\quad + \lambda^2\,\big((\varrho M + pL)v^a v^b + 2p(3U^2 - \mathrm{Sp}\, Z)\delta^{ab} + 4pZ^{ab}\big) + O(\lambda^3)
\end{aligned}$$

Dabei seien:

$$\begin{aligned}
L &:= v^2 - 2U \\
M &:= v^4 - 6Uv^2 + 8(\vec{v}, \overrightarrow{W}) - 2(U^2 + \mathrm{Sp}\, Z)
\end{aligned}$$

Formuliert man die Feldgleichungen mit dem Ricci-Tensor, so braucht man:

$$\begin{aligned}
T^{\bullet\bullet}_{tt} - \tfrac{1}{2}T^{\mu\bullet}_{\ \mu}\, g_{tt} &= \tfrac{1}{2}\varrho + \lambda\left(\varrho(v^2+U)+\tfrac{3}{2}p\right)\\
&\quad + \lambda^2\Big(\varrho(v^4-2Uv^2+3U^2+\operatorname{Sp}Z)+p(v^2+3U)\Big)+O(\lambda^3)\\
T^{\bullet\bullet}_{tb} - \tfrac{1}{2}T^{\mu\bullet}_{\ \mu}\, g_{tb} &= -\lambda\,\varrho v^b - \lambda^2\left(2\varrho W^b + (\varrho L+p)v^b\right)+O(\lambda^3)\\
T^{\bullet\bullet}_{ab} - \tfrac{1}{2}T^{\mu\bullet}_{\ \mu}\, g_{ab} &= \lambda\,\tfrac{1}{2}\varrho\delta_{ab} + \lambda^2\left(\varrho v^a v^b - (\varrho U+\tfrac{1}{2}p)\delta_{ab}\right)+O(\lambda^3)
\end{aligned}$$

6. Entwicklung der Bewegungsgleichungen einer idealen Flüssigkeit

Entgegen dem im Titel dieses Anhanges gemachten Versprechen gebe ich diese Entwicklungen nur bis auf Reste der Ordnung λ^2 an. In der nächsten Ordnung werden die Gleichungen (um genau zu sein: $T^{a\beta}{}_{;\beta}$) nämlich so umfangreich, daß sie schon wieder uninteressant sind.

$$\begin{aligned}
0 = T^{t\beta}{}_{;\beta} &= \varrho_{,t} + \operatorname{div}(\varrho\vec v) + \lambda\Big((\varrho L)_{,t} - \varrho U_{,t} + \operatorname{div}\left((\varrho L+p)\vec v\right)\Big) + O(\lambda^2)\\
\vec 0 = (T^{a\beta}{}_{;\beta}) &= (\varrho\vec v)_{,t} + \operatorname{Div}(\varrho\vec v\otimes\vec v + p\mathbf{1}) + \varrho\operatorname{grad}U\\
&\quad + \lambda\Big(\left((\varrho L+p)\vec v\right)_{,t} + \operatorname{Div}\left((\varrho L+p)\vec v\otimes\vec v + 2pU\mathbf{1}\right)\\
&\quad\quad + 4\varrho\Big(\vec W_{,t} - \left(U_{,t} + (\vec v,\operatorname{grad}U)\right)\vec v - [\vec v,\operatorname{rot}\vec W]\Big)\\
&\quad\quad + \varrho\operatorname{grad}(\operatorname{Sp}Z) + (2\varrho v^2 + 6\varrho U - p)\operatorname{grad}U\Big) + O(\lambda^2)
\end{aligned}$$

7. Vergleich mit der üblichen 1. post-Newtonschen Näherung

Gegeben sei auf $I\times\mathbb{R}^3$, $0\in I\subset\mathbb{R}$, I offen, eine Schar von Feldern $(\mathfrak{U}^{\alpha\beta}(\lambda), T^{\mu\nu}(\lambda))$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Im folgenden stehe eine Aussage wie „$f\in H_{s,\delta}$“ immer für „$f\in H_{s,\delta}(\Sigma_t,\mathbb{R})$ für alle $t\in I$“, wobei $\Sigma_t := \{\,(x^\mu)\in I\times\mathbb{R}^3 \mid x^0 = t\,\}$ sein soll. Ich verlange:

(1) $\mathfrak{U}^{\alpha\beta}\in H_{s,\delta}$, $\dot{\mathfrak{U}}^{\alpha\beta}\in H_{s-1,\delta+1}$, $\ddot{\mathfrak{U}}^{\alpha\beta}\in H_{s-2,\delta+2}$, wobei $2\le s$ und $-\frac{3}{2}<\delta<-\frac{1}{2}$ gelten soll. Die Abbildungen $\lambda\mapsto\mathfrak{U}^{\alpha\beta}(\lambda)$ seien C^2. Die Zeitableitungen mögen mit der λ-Entwicklung bis auf $O(\lambda^2)$ vertauschen. (Für die Raumableitungen gilt das sowieso, siehe die Bemerkungen am Ende des Abschnittes 4.3.)

(2) $T^{\alpha\beta}$ beschreibe eine ideale Flüssigkeit mit ϱ, $p \in H_{s-2,\delta+2}$, $v^a \in K_{s,\delta}$, $\lambda \mapsto \varrho(\lambda)$ sei aus C^2, $\lambda \mapsto p(\lambda)$ und $\lambda \mapsto v^a(\lambda)$ aus C^1.

(3) Die Feldgleichungen (4.9) und die verschärfte Harmonizitätsbedingung (4.10) seien erfüllt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aus den angegebenen Entwicklungen folgt dann:

$$
\begin{aligned}
g_{tt} &= 1 - \lambda\, 2\overline{U} + \lambda^2\, 2\big(\overline{U}^2 - 2\Psi - \Delta^{-1}(Z^{cd}{}_{,cd})\big) + O(\lambda^3),\\
g_{at} &= \lambda^2\, 4V^a + O(\lambda^3), \qquad g_{ab} = -\lambda\, \delta_{ab} + \lambda^2\, 2\overline{U}\delta_{ab} + O(\lambda^3),\\
\overline{U} &:= -4\pi G\, \Delta^{-1}(\varrho), \qquad V^a := -4\pi G\, \Delta^{-1}(\varrho v^a),\\
\Psi &:= -4\pi G\, \Delta^{-1}\big(\varrho(v^2 + \overline{U}) + \tfrac{3}{2}p\big).
\end{aligned}
$$

Wenn nun eine Funktion $f \in H_{s+1,\delta-1}$ existiert mit den Eigenschaften $\Delta f = -\operatorname{div} \overrightarrow{W}$, $f_{,t} \in H_{s,\delta}$, $\Delta(f_{,t}) = \partial_t(\Delta f)$, dann kann man die Koordinatentransformation $t' := t + \lambda^2 f$, $\acute{x}^a := x^a$ ausnutzen. (Man beachte, daß man dafür eigentlich das Konzept einer H_k- statt einer C^k-Mannigfaltigkeit braucht.) Sie führt auf:

$$
\begin{aligned}
g'_{tt} &= 1 - \lambda\, 2\overline{U} + \lambda^2\, 2\big(\overline{U}^2 - 2\Psi\big) + O(\lambda^3), \qquad g'_{at} = \lambda^2\, (\tfrac{7}{2}V^a + \tfrac{1}{2}\overline{W}^a) + O(\lambda^3),\\
g'_{ab} &= -\lambda\, \delta_{ab} + \lambda^2\, 2\overline{U}\delta_{ab} + O(\lambda^3), \qquad \overline{W}^a := V^a - 2f_{,a}.
\end{aligned}
$$

Dabei sind auf der rechten Seite alle Funktionen an der Stelle $(t, x^i) = \varphi(t', \acute{x}^j)$ zu nehmen. Wenn die Abhängigkeit von den Koordinaten (insbesondere von t) hinreichend friedlich ist und die Funktionen in den Sobolev-Räumen zur neuen Foliation liegen, so kann man diesen Ausdruck ganz in den neuen Koordinaten auswerten, da die Transformation erst in der Ordnung λ^2 von der Identität abweicht.

Dies entspricht beinahe der üblichen Formulierung, wie man sie zum Beispiel in [15] §39 finden kann. Dort wird allerdings die Teilchenzahldichte statt ϱ als Variable verwendet (ich habe das nicht gemacht, weil man dann bei den hier gebrauchten Funktionenräumen anscheinend $s \geq 4$ fordern muß). Daher unterscheidet sich das $\overline{U}$ hier von dem U dort um den Term $-\lambda\, 4\pi G\, \Delta^{-1}(\varrho\Pi) + O(\lambda^2)$, wobei Π die innere Energie sein soll. Ein kompensierender Π-Term ist bei Ψ anzusetzen, das dann vom Ψ in [15] nur noch um $O(\lambda^1)$ differiert. V^a hier unterscheidet sich von V_j in [15] in der Ordnung λ. Das $\overline{W}^a$ hier kann man bei hinreichend starken Annahmen über die Darstellbarkeit von f als Poisson-Integral und das Abfallverhalten von W^a in der Tat bis auf Restterme der Ordnung λ in das W_j von [15] überführen. Allerdings scheint mir dazu ein Abfallverhalten besser als r^{-1} für W^a und besser als r^{-2} für $W^a{}_{,b}$ nötig zu sein, und das ist bei $-\frac{3}{2} < \delta < -\frac{1}{2}$ im allgemeinen nicht gegeben.

Literaturverzeichnis

[1] Jürgen Ehlers
"Über den Newtonschen Grenzwert der Einsteinschen Gravitationstheorie"
In: J. Nitsch, J. Pfarr, E.-W. Stachow (Hrsg.): *Grundlagenprobleme der modernen Physik,* Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut, 1981. Seite 65–84.
Der Artikel enthält Hinweise auf frühere Veröffentlichungen zu diesem Thema.

[2] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis
The large scale structure of space-time
Cambridge, etc.: Cambridge University Press, 1973

[3] Robert Geroch
"A Method for Generating Solutions of Einstein's Equations"
J. Math. Phys. 12(6), 918–924 (1971)

[4] Michael Spivak
A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume 1
2nd edition
Berkeley: Publish or Perish, 1979

[5] Boto von Querenburg [G. Bengel, *et al.*]
Mengentheoretische Topologie
Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage
Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1979

[6] R. Geroch
"Limits of Spacetimes"
Commun. math. Phys. 13, 180–193 (1969)

[7] H. Keres
"Physical Interpretation of Solutions of the Einstein Equations"
Soviet Physics JETP 25(3), 504–511 (1967)

[8] Erwin Madelung
Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers
7. Auflage
Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1964
(Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; Band 4)

[9] George Arfken
Mathematical Methods for Physicists
Enlarged with additional exercises
New York, London: Academic Press, 1968

[10] Robert H. Boyer, Richard W. Lindquist
"Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric"
J. Math. Phys. 8(2), 265–281(1967)

[11] Brandon Carter
"Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields"
Phys. Rev. 174(5), 1559–1571 (1968)

[12] Jürgen Ehlers
"On Limit Relations Between, And Approximative Explanations Of, Physical Theories"
In: R. Barcan Marcus, G.J.W. Dorn, P. Weingartner (Hrsg.): *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII*, Amsterdam: North Holland, 1986. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics; 114). Seite 387–403.

[13] T. Futamase, Bernard F. Schutz
"The Newtonian and post-Newtonian approximations are asymptotic to General Relativity"
Phys. Rev. D 28(10), 2363–2372 (1983)

[14] Th. De Donder
La Gravifique einsteinienne
Paris: Gauthier-Villars, 1921.
Seite 40, Gleichung $(117)_1$.

[15] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler
Gravitation
San Francisco: W.H. Freeman, 1973

[16] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick
Analysis, Manifolds and Physics
Amsterdam, New York, Oxford: North Holland, 1977
Seite 71.

[17] M. Cantor
"Spaces of Functions with Asymptotic Conditions on $\mathbb{R}^n$"
Indiana Univ. Math. J. 24(9), 897–902 (1975)

[18] Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou
"Elliptic systems in $H_{s,\delta}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity"
Acta Math. 146(1–2), 129–150 (1981)

[19] J. Dieudonné
Foundations of Modern Analysis
Enlarged and corrected printing
New York, London: Academic Press, 1969
(Pure and Applied Mathematics; Volume 10–I)

[20] Lynn H. Loomis, Shlomo Sternberg
Advanced Calculus
Reading/Mass., etc.: Addison-Wesley, 1968

[21] Y. Choquet-Bruhat
"Recent Results on the Cauchy Problem in General Relativity"
In *Aspetti Matematici Della Teoria Della Relatività*, Roma: Accademia Nazionale Dei Lincei, 1983 (Atti Dei Convegni Lincei; 57). Seite 17–25.

[22] Anthony C. Hearn
REDUCE User's Manual: Version 3.3
Santa Monica: The Rand Corporation, July 1987.
Für einen Teil der Rechnungen wurde die Version 3.1 verwendet.